

CINÉMATIQUE

TD

Réf. Programme: S411 - Solide indéformable, lois de mouvement
Compétences visées: B2-06, B2-07, C2-10, C2-11

v1.1

Lycée Richelieu – 64, rue Georges Sand – 92500 Rueil-Malmaison - Académie de Versailles

Cinématique du solide

VÉHICULE AUTO-BALANCÉ DE TYPE SEGWAY

1 Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto-balancé Segway[®] (Figure 1) moyen de transport motorisé pour la ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne !

La conduite du Segway[®] se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement (comme pour la marche à pied dans laquelle le piéton s'incline vers l'avant pour débiter le mouvement). Les virages à droite et à gauche sont quant à eux commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon.



FIGURE 1 – Illustration Segway

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'individu de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale. Le Segway comporte à cet effet des capteurs et des microprocesseurs commandant les deux moteurs électriques équipant les deux roues.

Structurellement, le véhicule est composé de (voir figure 2) :

- d'un chariot (châssis + 2 roues uniquement), transportant le conducteur,
- de deux moto-réducteurs entraînant les roues (un par roue),
- d'un ensemble constitué d'un gyromètre et d'un pendule délivrant une information sur l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale et sur sa dérivée,
- d'un calculateur élaborant, à partir des informations issues des capteurs, les consignes de commande des groupes moto-réducteurs,
- de batteries fournissant l'énergie aux divers composants.

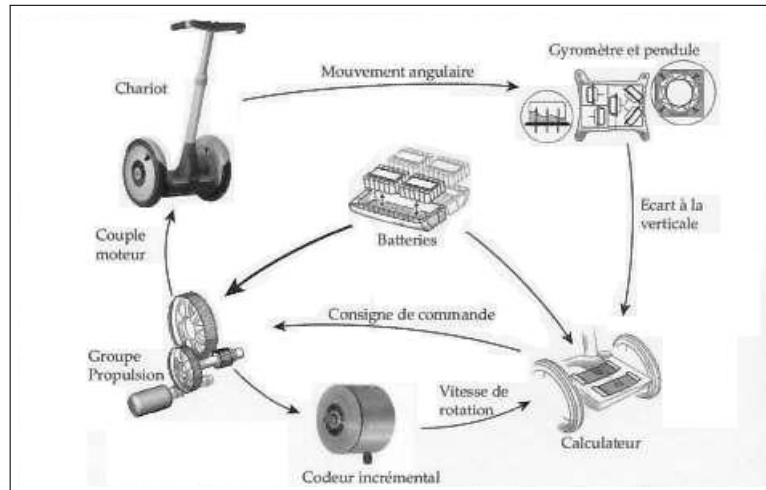
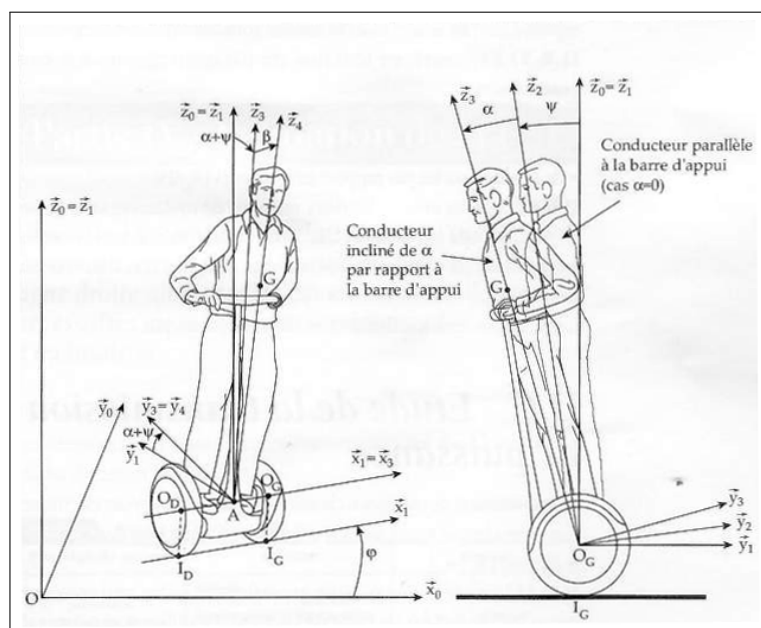


FIGURE 2 – Eléments constituant le Segway

2 Paramétrage

On considère les solides suivants supposés indéformables :

- la route $\mathbf{0}$;
- le châssis du chariot $\mathbf{2}$;
- la roue droite R_D ;
- la roue gauche R_G ;
- le conducteur $\mathbf{4}$.

FIGURE 3 – Paramétrage global (Sur la figure de droite, on considère $\beta = 0$).

La figure 3 illustre le paramétrage décrit ci-après :

- Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère de référence lié à la route **0** tel que \vec{z}_0 soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- Le châssis du chariot **2** est orienté par rapport à la route **0** par l'intermédiaire de deux repères :
 - Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation par rapport à R_0 autour de \vec{z}_1 tel que \vec{x}_1 soit colinéaire à l'axe commun des roues de centres de gravité respectifs O_D et O_G . A se trouve au milieu de cet axe tel que $\overrightarrow{O_D O_G} = L\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{O_D A} = \frac{L}{2}\vec{x}_1 = \overrightarrow{A O_G}$. On pose $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ l'angle de virage ;
 - Le repère $R_2(A, \vec{x}_{12}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à **2** en rotation autour de (A, \vec{x}_{12}) par rapport à R_1 tel que \vec{z}_2 soit parallèle à la barre d'appui du chariot. On pose $\psi = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale. La régulation consiste à maintenir cet angle nul.
- Le conducteur **4** est orienté par rapport au châssis **2** par l'intermédiaire de deux repères :
 - le repère $R_3(A, \vec{x}_{23}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation par rapport à R_2 autour de (A, \vec{x}_{23}) . On pose $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ l'angle d'inclinaison arrière-avant du conducteur ;
 - le repère $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_{34}, \vec{z}_4)$ lié à **4** en rotation autour de (A, \vec{y}_{34}) par rapport à R_3 tel que (A, \vec{z}_4) passe par le centre de gravité G du conducteur **4**. On pose $\beta = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ l'angle d'inclinaison droite-gauche du conducteur et $\overrightarrow{A G} = h.\vec{z}_4$ avec h constante positive.
- La roue droite R_D associée à un repère $R_D(O_D, \vec{x}_{12}, \vec{y}_D, \vec{z}_D)$ est en liaison pivot d'axe (O_D, \vec{x}_{12}) par rapport au châssis **2**. On pose $\theta_D = (\vec{y}_2, \vec{y}_D) = (\vec{z}_2, \vec{z}_D)$ l'angle de rotation de la roue droite par rapport au châssis **2**. On note I_D le point de contact de la roue droite avec la route tel que $\overrightarrow{O_D I_D} = -R.\vec{z}_1$ avec R rayon des roues, constante positive. On suppose qu'il y a roulement sans glissement de la roue droite sur la route en I_D .
- La roue gauche R_G associée à un repère $R_G(O_G, \vec{x}_{12}, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$ est en liaison pivot d'axe (O_G, \vec{x}_{12}) par rapport au châssis **2**. On pose $\theta_G = (\vec{y}_2, \vec{y}_G) = (\vec{z}_2, \vec{z}_G)$ l'angle de rotation de la roue droite par rapport au châssis **2**. On note I_G le point de contact de la roue gauche avec la route tel que $\overrightarrow{O_G I_G} = -R.\vec{z}_1$ avec R rayon des roues, constante positive. On suppose qu'il y a roulement sans glissement de la roue droite sur la route en I_G .

Enfin, on pose pour la vitesse du chariot : $\overrightarrow{V_{A \in 2/0}} = U(t).\vec{x}_1 + V(t).\vec{y}_1$.

Objectif

Quels sont les éléments cinématiques nécessaires pour vérifier le non-dérapiage des roues en virage, les performances de vitesse et d'accélération ?

3 Travail demandé

Paramétrage

Question 1 Établir les schémas de passage entre bases (6 figures).

Étude du comportement des roues au sol

Question 2 Déterminer les vecteurs vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$, $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$, $\overrightarrow{\Omega}_{R_D/2}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{R_G/2}$ dans la base de R_1 .

Question 3 Que dire des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}_{I_D \in R_D/0}$ et $\overrightarrow{V}_{I_G \in R_G/0}$? Justifier pourquoi.

Question 4 Écrire la relation de composition des vitesses avec le châssis **2** pour le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{I_D \in R_D/0}$.

Question 5 Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{I_D \in 2/0}$ par le champ des vitesses de 2/0 entre A et I_D dans la base de R_1 .

Question 6 Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{I_D \in R_D/2}$ par le champ des vitesses de $R_D/2$ entre O_D et I_D dans la base de R_1 .

Question 7 En déduire l'expression de $\overrightarrow{V}_{I_D \in R_D/0}$ dans la base de R_1 puis au regard de la question 3, écrire les équations algébriques traduisant le comportement de la roue droite sur la route.

Question 8 Reprendre librement mais par similitude l'étude des questions 4 à 7 pour la roue gauche dans le but d'écrire les équations algébriques traduisant le comportement de la roue gauche sur la route. En déduire une relation de comportement reliant les paramètres $\dot{\theta}_D$, $\dot{\theta}_G$ et $\dot{\varphi}$ aux dimensions R et L .

Détermination de la vitesse et de l'inclinaison du conducteur en virage en fonctionnement régulé

Dans cette partie, on considèrera les hypothèses suivantes :

- Dans cette partie, où le véhicule évolue en virage en marche avant, on suppose que l'asservissement d'inclinaison est parfaitement réalisé c'est à dire que $\varphi = cste = 0$.
- De plus, le conducteur est supposé parallèle à la barre d'appui soit $\alpha = cste = 0$ et uniquement incliné d'un angle β constant vers l'intérieur du virage.
- Cela impose une composante $V(t)$ constante négative en marche avant. $U(t)$ est quant à lui nul au regard des équations algébriques déterminées précédemment.
- Enfin, on considère que le virage est pris à vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ constante positive.

Question 9 Déterminer le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{4/0}$ puis le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{G \in 4/0}$ dans la base de R_1 .

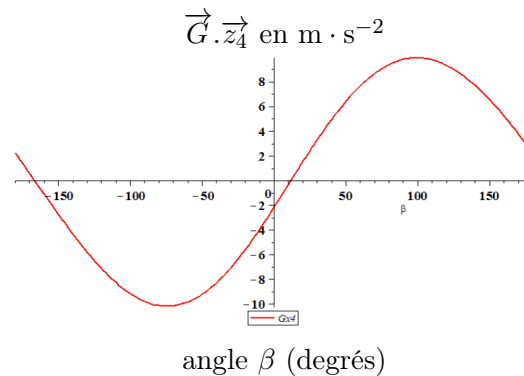
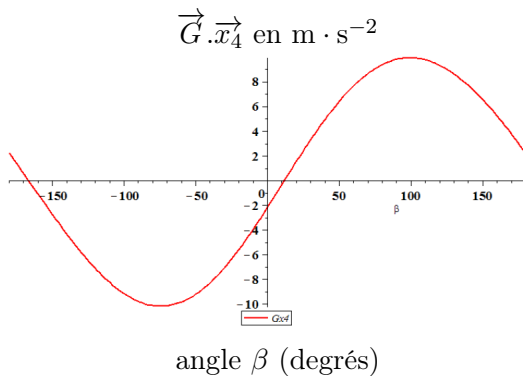
L'accélération ressentie par le conducteur est $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ où $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_1$ est l'accélération de la pesanteur.

Question 10 Calculer le vecteur $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ dans la base de R_1 .

La position naturelle d'un individu en virage (cas de la bicyclette, des rollers, ...) est de s'incliner vers l'intérieur du virage. L'application du principe de la dynamique au conducteur montre alors que cette condition est équivalente à $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ colinéaire à \vec{z}_4 .

Question 11 Projeter le vecteur $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ dans la base de R_4 . En déduire la ou les équations traduisant la nullité des composantes de $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ suivant \vec{x}_4 et \vec{y}_4 .

On considère les conditions suivantes de fonctionnement : $\dot{\varphi} = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 0,95 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $V = 10 \text{ km/h}$ (soit un rayon de virage de $3,5 \text{ m}$). En place d'une résolution analytique, on donne ci-dessous les courbes des projections de $\vec{G} = \vec{g} - \overrightarrow{\Gamma_{G \in 4/0}}$ suivant \vec{x}_4 et \vec{y}_4 .



Question 12 Déterminer graphiquement sur les courbes l'angle β du conducteur dans les conditions énoncées. Justifier. En déduire la valeur numérique $\vec{G} \cdot \vec{z}_4$ de l'accélération ressentie par le conducteur suivant \vec{z}_4 . Conclure.