

# DYNAMIQUE

TD

CPGE  
PTSI-PT  
Lycée Jean Zay - Thiers

Compétences visées: B2-10, C1-05, C2-08, C2-09

v1.6

*Lycée Jean Zay - 21 rue Jean Zay - 63300 Thiers - Académie de Clermont-Ferrand*

## HÉLICOPTÈRE

### 1 Présentation

L'hélicoptère est un giravion dont la sustentation est assurée par un rotor ou ensemble de pales, tournant autour d'un axe sensiblement vertical.

Ce rotor, entraîné par un moteur, assure à la fois la sustentation et la propulsion de l'hélicoptère. Ce dernier est donc capable de vol stationnaire, de décollage et atterrissage vertical, et de déplacement dans toutes les directions.



Un rotor auxiliaire nécessaire à la stabilisation de l'appareil est placé à l'extrémité du fuselage.

#### Objectif

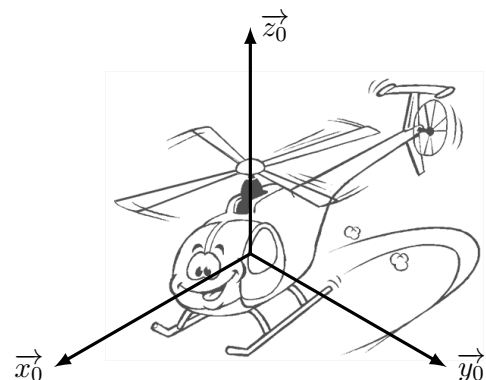
L'étude porte sur la sustentation de l'hélicoptère en vue, par la suite, de justifier différentes dispositions constructives.

### 2 Données et hypothèses

#### 2.1 Paramétrage

Le fuselage de l'hélicoptère est repéré  $\mathbf{0}$  et on lui associe le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  défini de la manière suivante :

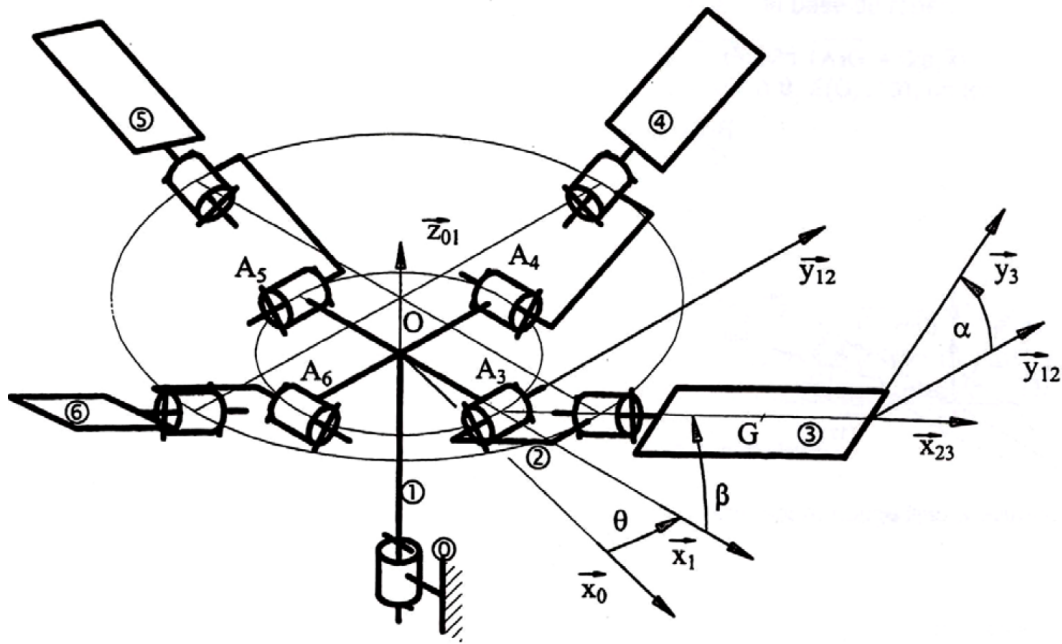
- $(O, \vec{z}_0)$  correspond à l'axe de rotation du rotor principal ;
- $(O, \vec{x}_0)$  définit l'axe longitudinal de l'appareil et est orienté de l'arrière vers l'avant ;
- $(O, \vec{y}_0)$  définit l'axe transversal.



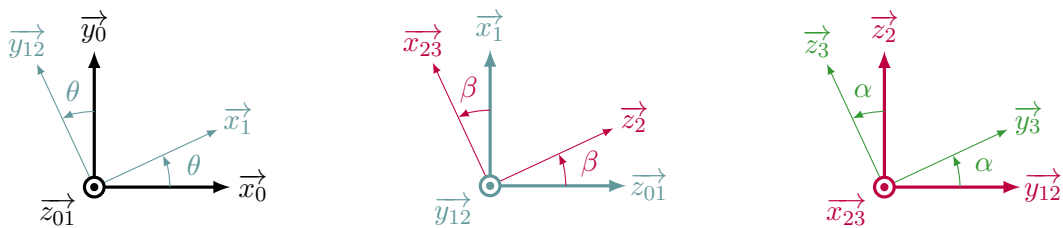
## 2.2 Structure du rotor principal

Ce rotor est constitué (voir schéma ci-dessous) :

- d'un moyeu central **1**, en liaison pivot d'axe avec le fuselage **0**. Ce moyeu est entraîné en rotation par la turbine ;
- de quatre pales **3, 4, 5, 6** considérées comme indéformables ;
- de quatre pieds de pales identiques considérés comme indéformables, reliant les pales au moyeu.



Modèle simplifié du rotor



Figures planes

On associe :

- au moyeu **1** le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_{12}, \vec{z}_1)$  ;
- au pied de pale **2** le repère  $R_2(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_{12}, \vec{z}_2)$  ;
- à la pale **3** le repère  $R_3(A_3, \vec{x}_{23}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

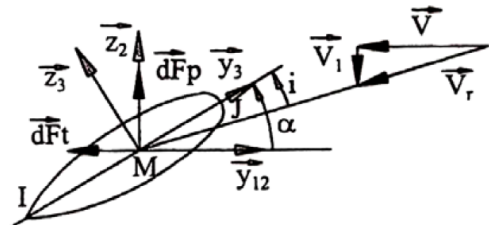
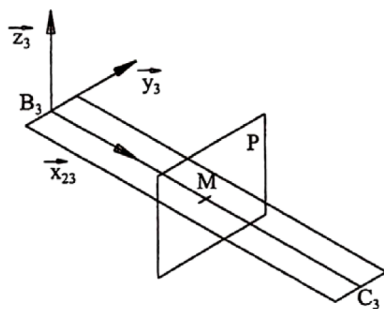
De plus :

- le moyeu **1** est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec la carlingue **0** ;
- l'angle  $\theta$  est l'angle de rotation du moyeu :  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- le pied de pale **2** est en liaison pivot d'axe  $(A_3, \vec{y}_{12})$  avec le moyeu **1** ;
- l'angle  $\beta$  est appelé angle de battement :  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{23})$  ;

- la liaison de la pale **3** avec le pied de pale **2** est une pivot d'axe  $(A_3, \vec{y}_{23})$  ;
- l'angle  $\alpha$  est appelé angle de pas de la pale **3** :  $\alpha = (\vec{y}_{12}, \vec{y}_3)$  ;
- le point  $A_3$  est tel que :  $\vec{OA}_3 = r.\vec{x}_1$  avec  $r > 0$  ;
- les trois autres pales sont reliées de manière identique au moyeu en  $A_4, A_5, A_6$  ;
- les quatre pales sont identiques, et ont la même masse notée  $m$ , la même longueur et leur forme est celle de la pale **3**, définie de la manière suivante.

### 2.3 Hypothèses

- La partie « utile » de la pale est constituée du segment  $B_3C_3$ .
  - ◊ le point  $B_3$  est tel que :  $\vec{A_3B_3} = l.\vec{x}_{23}$
  - ◊ le point  $C_3$  est tel que :  $\vec{B_3C_3} = L.\vec{x}_{23}$



- Toutes les sections de la pale passant par un plan  $P$  perpendiculaire à  $(B_3C_3)$  sont identiques (profil d'aile de corde  $IJ$ ).
- En utilisant les lois de l'aérodynamique, on montre que les actions de l'air sur une pale (**3** par exemple) s'écrivent en  $P_i$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3}\}_{P_i} = \left\{ \begin{array}{c} F_P \cdot \vec{z}_2 + F_T \cdot \vec{y}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{A_3P_3} = d \cdot \vec{x}_{23}$$

- On montre également que les actions aérodynamiques sur le rotor (somme des actions de l'air sur l'ensemble des pales) s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3+4+5+6}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} 4F_P \cos \beta \cdot \vec{z}_{01} \\ 4F_T (r + d \cos \beta) \cdot \vec{z}_{01} \end{array} \right\}$$

avec :  $F_P$  (effort de portance) et  $F_T$  (effort de trainée) qui varient en fonction de  $\alpha$ .

- Dans toute l'étude, **on suppose constant** :  $\dot{\theta}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .
- L'hélicoptère est en vol stationnaire, ce qui correspond à la situation où l'hélicoptère reste en l'air, à la verticale d'un point et à altitude constante.
- On note  $g$  l'accélération de la pesanteur.
- La masse et l'inertie des pieds de pales sont négligées.

## 3 Travail demandé

$G$  est le centre de gravité de la pale **3** tel que  $\vec{A_3G} = a.\vec{x}_{23}$

**Question 1** Donner l'expression dans  $R_1$  de l'accélération de  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathbf{0}$ ,  $\overrightarrow{\Gamma_{G \in 3/0}}$ , en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\beta$ ,  $r$  et  $a$ .

La pale **3** étant assimilée à une tige d'épaisseur négligeable, sa matrice d'inertie en  $G$  se ramène dans le repère  $R_2$  à la matrice :

$$\overline{\overline{I}}_{(G,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{b_2}$$

**Question 2** Justifier la forme de la matrice d'inertie. Déterminer ensuite le torseur dynamique de la pale **3** en  $G$  dans son mouvement par rapport à  $\mathbf{0}$ .

On note  $(E)$ , l'ensemble constitué par le moyeu **1**, les quatre pieds de pales et les quatre pales. Le moment d'inertie du moyeu **1** autour de  $(O, \overrightarrow{z_{01}})$  est noté  $J$ , son centre de gravité est situé sur l'axe de rotation  $(O, \overrightarrow{z_{01}})$  et on suppose que le moyeu est équilibré.



### Remarque

On notera qu'avec le modèle de liaison adopté pour la pale à la question précédente, l'ensemble des 4 pales possède deux plans de symétrie.

**Question 3** Déterminer le torseur dynamique de  $(E)$  au point  $O$  dans son mouvement par rapport à  $\mathbf{0}$ .

$C_m$  désigne le couple appliqué par la turbine au moyeu **1**. On néglige les effets de pesanteur sur  $(E)$  devant les autres actions mécaniques.

**Question 4** Exprimer  $C_m$  en fonction de  $F_T$ ,  $\beta$ ,  $r$  et  $d$ .

**Question 5** Dans le cas du vol stationnaire, établir une relation entre la masse  $M$  de l'hélicoptère  $F_P$  et  $\beta$ .

**Question 6** Le pilote dispose d'une commande de réglage qui modifie de la même quantité l'angle de pas de chaque pale. Que provoque une modification de cet angle sur le comportement de l'hélicoptère ?