Dynamique

Formulaire

À savoir par cœur !

v1.7

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand

1 Torseur des Actions Mécaniques Extérieures appliquées sur S

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} \end{array} \right\}_A \qquad \text{avec :} \quad \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \overrightarrow{M_{B,\text{ext}\to S}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}}$$

2 Torseur dynamique de S dans son mouvement par rapport à R_g écrit au point A

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} \end{array} \right\}_A \qquad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

3 Torseur cinétique de S dans son mouvement par rapport à R_g écrit au point A

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \end{array} \right\}_A \qquad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$$

Calcul du moment cinétique par la matrice d'inertie :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}}$$

4 Matrice d'inertie

Forme de la matrice d'inertie en fonction de la forme du solide

- Pour un solide quelconque : $\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b$
- Le solide a le plan $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$ de symétrie : $\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$

- Le solide a 2 plans de symétries perpendiculaires : $\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$
- Le solide a 1 axe de révolution $(O, \overrightarrow{z})$: $\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s} \quad \left(A = B = \dfrac{C}{2} + \int_S z^2\, dm\right)$

Calcul du moment d'inertie de S par rapport à l'axe $\Delta = (O, \overrightarrow{u})$

$$I_\Delta = \overrightarrow{u} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{u}\right)$$

Théorème de Huygens pour passer du centre de gravité à un autre point O tel que $\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{x} + b.\overrightarrow{y} + c.\overrightarrow{z}$

$$\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

5 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}$$

6 Principe Fondamental de la Dynamique

- Pour l'isolement d'un solide S :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A}$$

- Pour l'isolement d'un ensemble de solides $\Sigma = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to \Sigma}\}_A = \{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\} + \{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\} + \cdots + \{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\}$$

- Théorème de la résultante dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} = m_s\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

- Théorème du moment dynamique en A :

$$\sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$$