Cinématique

Cours

Rappels de PTSI

v1.5

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand

Compétences visées :

B2-01	Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
B2-12	Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
B2-13	Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un plan d'ensemble.
B2-14	Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
C2-05	Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.

Table des matières

1 Préambule **3**

2 Généralités **3**

2.1 Solide indéformable 3

2.2 Repère, référentiel, solides 3

2.3 Positionnement d'un point ou d'un solide dans l'espace 4

3 Rappels de cinématique du point **6**

3.1 Repérage d'un point 6

3.2 Trajectoire 6

3.3 Vitesse d'un point dans un référentiel 6

3.4 Accélération d'un point par rapport à un référentiel 7

4 Dérivation vectorielle et vecteur taux de rotation **7**

4.1 Formule de dérivation vectorielle 8

4.2 Propriétés du vecteur taux de rotation 8

5 Champ des vecteurs vitesse et accélération d'un solide **9**

5.1 Définitions 9

5.2 Vitesse d'un solide 9

5.3 Accélération d'un solide 10

6 Torseur cinématique **11**

6.1 Définition 11

6.2 Propriétés 11

7 Mouvements particuliers **12**

7.1 Mouvement de translation 12

7.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe 13

7.3 Contact ponctuel 13

1 Préambule

Ce document n'est pas destiné à remplacer votre cours de PTSI. Son objectif est plus de vous rappeler les points essentiels à maîtriser absolument pour aborder sereinement le programme de PT (la dynamique, tout particulièrement).

2 Généralités

2.1 Solide indéformable

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps : $\forall A \in S$ et $\forall B \in S$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{cste} \quad \forall t$.

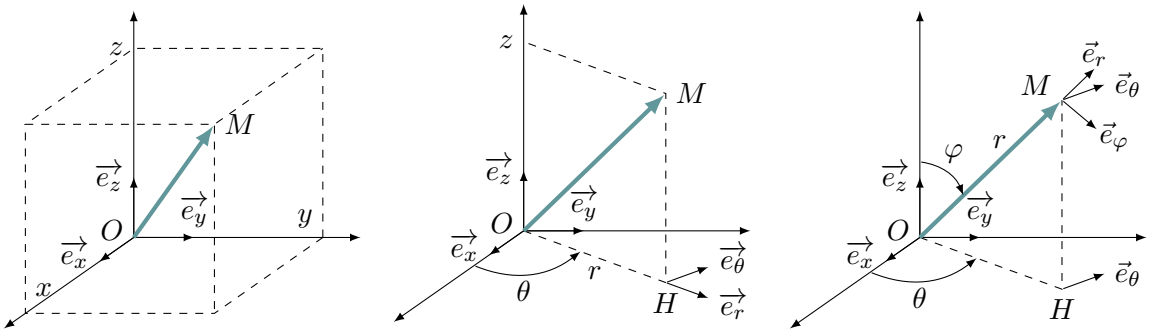
2.2 Repère, référentiel, solides

2.2.1 Notion de référentiel

Afin d'étudier le mouvement d'un point ou d'un système de solides, il est nécessaire de mettre en place un système de référence appelé « référentiel ». Il représente en quelque sorte la position d'observation des phénomènes. Il est composé d'une description de l'espace (repère) et d'une description du temps.

2.2.2 Notion de repère et paramétrages courants

Un repère est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs formant une base. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de l'origine.



Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$M(x, y, z)$	$M(r, \theta, z)$	$M(r, \varphi, \theta)$
$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r} + z.\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

FIGURE 1 – Coordonnées d'un point M dans les 3 systèmes de coordonnées

2.2.3 Équivalence repère - solide

À chaque solide, on attache un repère. Le repère et le solide étant indéformables, on peut les confondre. Ainsi, l'étude des mouvements d'un solide S_k par rapport à un solide S_i notée (S_k/S_i) est identique à :

- l'étude des mouvements du solide S_k par rapport à un repère R_i lié au solide S_i (S_k/R_i),
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au solide S_i (R_k/S_i),
- l'étude des mouvements du repère R_k lié au solide S_k par rapport au repère R_i lié au solide S_i (R_k/R_i).

Remarque

Le référentiel choisi est généralement marqué par le symbole du bâti dans le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique.

2.3 Positionnement d'un point ou d'un solide dans l'espace

2.3.1 Paramétrage pour positionner un point

Pour positionner un point M dans l'espace (3 dimensions) par rapport à un repère R_i, il est nécessaire de paramétrer 3 mouvements. Une possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**. Il faut donc 3 degrés de liberté pour positionner un point dans l'espace. Soit 3 translations (coordonnées cartésiennes), soit 2 translations sur des axes différents et 1 rotation autour d'un axe (coordonnées cylindriques), soit 1 translation sur un axe, et 2 rotations autour de 2 axes (coordonnés sphériques), tel que représenté sur la Figure 1.

2.3.2 Paramétrage pour positionner un solide dans l'espace

Pour positionner un solide S_k par rapport à un repère R_i (associé au solide S_i), dans un espace à trois dimensions, il est nécessaire de paramétrer la position du repère R_k par rapport au repère R_i. Il est usuel de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_k par rapport à celle du repère R_i, définissant 3 rotations. Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i. Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). Une liaison entre deux solides annule p degrés de liberté avec $0 < p \leq 6$.

2.3.3 Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent une possibilité pour définir l'**orientation** d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 paramètres angulaires.

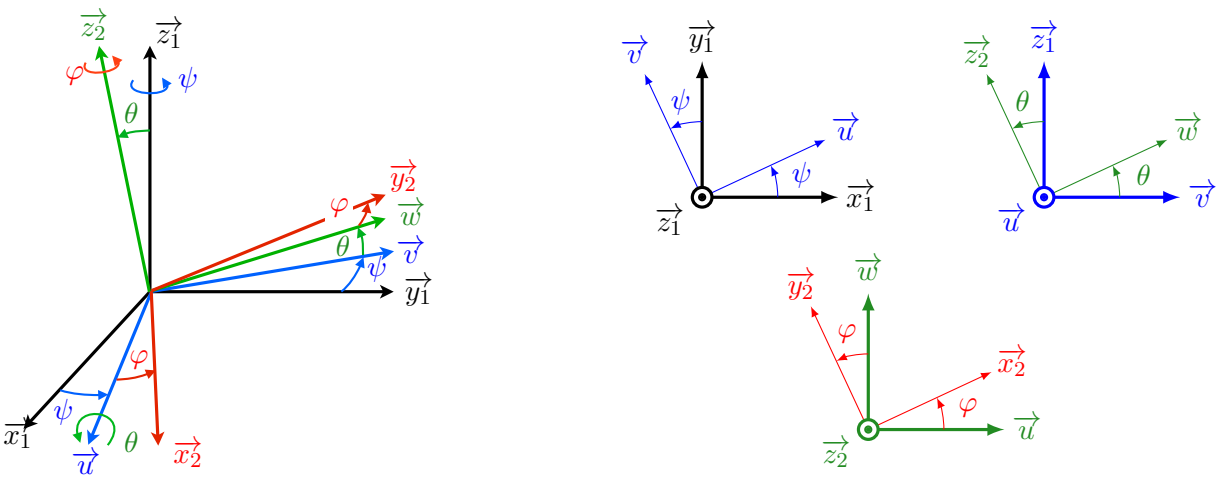


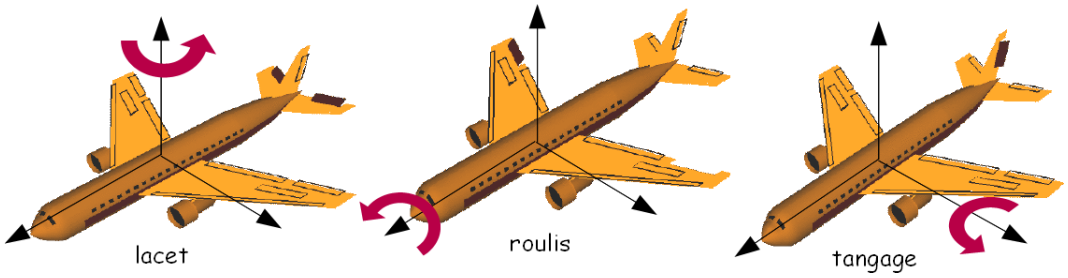
FIGURE 2 – Orientation de deux repères à l'aide des angles d'Euler

Les 3 rotations s'effectuent autour de 3 vecteurs indépendants. En considérant un repère initial $R_1\left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$, le choix des vecteurs de rotation effectué d'après Euler est le suivant :

- la première rotation (notée ψ sur la figure ci-dessus), appelée **précession**, s'effectue autour de z_1 telle que $\psi = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{v})$. On obtient donc le repère $R'_1\left(O_1, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z_1}\right)$;
- la seconde rotation (notée θ sur la figure ci-dessus), appelée **nutation**, s'effectue autour de u telle que $\theta = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$. On obtient donc le repère $R''_1\left(O_1, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z_2}\right)$;
- la dernière rotation (notée φ sur la figure ci-dessus), appelée **rotation propre**, s'effectue autour de z_2 telle que $\varphi = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{y_2})$. On obtient donc le repère $R_2\left(O_1, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.

2.3.4 Angles de roulis, de tangage et de lacet

Pour les systèmes du domaine des transports, on privilégie les angles de roulis, de tangage et de lacet.



3 Rappels de cinématique du point

3.1 Repérage d'un point

Définition *Repérage d'un point*

Soit un repère de référence $R_0\left(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ et un point M de l'espace quelconque. On définit la position du point M par le vecteur position :

$$\overrightarrow{O_0M} = x_M(t).\overrightarrow{x_0} + y_M(t).\overrightarrow{y_0} + z_M(t).\overrightarrow{z_0}$$

Le vecteur position est une fonction vectorielle du temps (car toutes ses coordonnées peuvent dépendre du temps). Ses coordonnées s'expriment en mètre [m].

3.2 Trajectoire

La trajectoire du point M dans le repère R_0 est l'ensemble des positions de M dans le repère R_0 lorsque le temps décrit un intervalle donné.

3.3 Vitesse d'un point dans un référentiel

3.3.1 Vitesse moyenne

On considère la position à l'instant t du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ notée $\overrightarrow{O_0M}(t)$. On note le vecteur position à l'instant $t + \Delta t$: $\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t)$.

Définition *Vitesse moyenne*

La vitesse moyenne du point M dans son mouvement par rapport à R_0 est :

$$[\overrightarrow{V_{M/R_0}}]_{moy} = \frac{\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$$

3.3.2 Vitesse instantanée

L'inconvénient de la vitesse moyenne est la définition de l'intervalle de temps Δt qui ne permet pas une définition unique de la vitesse. La vitesse instantanée permet de définir la vitesse d'un point par rapport à un référentiel à l'instant t.

Définition *Vitesse instantanée*

On appelle vecteur vitesse instantanée ou vitesse à l'instant t du point M dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$, le vecteur : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{O_0M}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$

On note cette limite : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0M}(t)}{dt}\right]_{R_0}$

La dimension de la vitesse instantanée est une longueur sur un temps, son unité est le mètre par seconde [m.s^{-1}].

Remarque

La droite support du vecteur vitesse instantanée est tangente à la trajectoire du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ à un instant t donné.

Attention

L'écriture de la vitesse $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ implique de choisir un point fixe de R_0 pour définir le vecteur position $\overrightarrow{O_0M}$.

Attention

Ce n'est pas parce qu'on dérive par rapport à un repère R donné que l'on doit exprimer le résultat dans ce même repère !!!

3.4 Accélération d'un point par rapport à un référentiel

Définition *Accélération instantanée*

L'accélération instantanée du point M par rapport au repère R_0 est définie par :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}(t)}{dt^2}\right]_{R_0}$$

Son unité est le mètre par seconde carré [m.s^{-2}].

4 Dérivation vectorielle et vecteur taux de rotation

Pour calculer des vitesses et des accélérations, on est amené à dériver des vecteurs par rapport à un référentiel donné. La méthode qui consiste à exprimer les vecteurs à dériver dans le repère du référentiel puis à dériver leurs coordonnées conduit très souvent à des calculs lourds et à des expressions gigantesques. Une autre méthode consiste à **changer de base de dérivation.**

4.1 Formule de dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ en mouvement par rapport à un repère R_0 et un repère R_1 en mouvement également par rapport à R_0.

Définition *Dérivation vectorielle - Formule de Bour*

La formule de dérivation vectorielle, appelée parfois « Formule de Bour » est :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ est le vecteur taux de rotation (ou vitesse angulaire) de R_1 par rapport à R_0.

Remarque

Si $\overrightarrow{u}$ est fixe dans R_1, la formule se simplifie : $\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u}$

Toujours essayer de choisir le repère de dérivation pour se ramener à cette formule simplifiée.

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe $(O, \overrightarrow{z})$ de R_1 par rapport à R_0 d'un angle $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$, le vecteur taux de rotation est parallèle à l'axe de rotation (dirigé dans l'exemple selon $\overrightarrow{z}$) et a pour norme la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, orienté dans le sens direct. Il s'exprime en rad.s^{-1} : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \dot{\theta}\overrightarrow{z}$.

Attention

La formule de Bour est utilisée essentiellement pour **dériver des vecteurs unitaires**. On n'utilisera pas cette formule pour dériver un vecteur vitesse ou position, par exemple.

4.2 Propriétés du vecteur taux de rotation

4.2.1 Antisymétrie

Propriété *Antisymétrie*

Soient un repère R_0 et un repère R_1 : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{R_0/R_1}}$

4.2.2 Composition des vecteurs taux de rotation

Considérons 3 repères R_0, R_1 et R_2 et un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque. En appliquant la formule de dérivation composée précédente, on obtient :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{u} \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_2} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{R_0/R_2}} \wedge \overrightarrow{u}$$

En additionnant les trois relations précédentes, on a : $\overrightarrow{0} = \left(\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_0/R_2}}\right) \wedge \overrightarrow{u}$

Définition *Composition des vecteurs taux de rotation*

Pour $\overrightarrow{u}$ quelconque, on en déduit **la composition des vecteurs taux de rotation** :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$$

On peut généraliser cette relation pour n repères.

5 Champ des vecteurs vitesse et accélération d'un solide

5.1 Définitions

Considérons tous les points d'un solide S_1 au cours de son déplacement par rapport à un repère R_0. À un instant donné, on peut alors déterminer les vecteurs vitesse et les vecteurs accélération de tous ces points :

- l'ensemble de ces vecteurs vitesse constitue le champ des vecteurs vitesse du solide en mouvement ;
- l'ensemble de ces vecteurs accélération constitue le champ des vecteurs accélération du solide en mouvement.

Le vecteur vitesse d'un point M appartenant au solide S_1 est noté $\overrightarrow{V_{M\in S_1/R_0}}$ et son accélération est notée $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S_1/R_0}}$.

Remarque

Le symbole $\in$ permet de considérer n'importe quel point lié à S_1, même si le point n'appartient pas physiquement au solide à l'instant considéré ! Parfois, $\in$ est remplacé par une virgule, pour alléger un peu la notation : $\overrightarrow{V_{M\in S_1/R_0}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{V_{M,S_1/R_0}}$.

5.2 Vitesse d'un solide

5.2.1 Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

Définition *Équiprojectivité*

Soient A et B deux points du solide S. On a alors : $\overrightarrow{V_{A\in S/R_0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S/R_0}} \cdot \overrightarrow{AB}$

On dit que le champ des vitesses est équiprojectif. Cette propriété permet de déterminer graphiquement des vitesses sans faire de calcul ! (cf rappel de cinématique graphique).

5.2.2 Formule de changement de point

Soient A et B deux points du solide S. Connaissant la vitesse de A appartenant à S par rapport à R_0, on souhaite déterminer la vitesse du point B appartenant à S par rapport à R_0.

Définition *Relation de changement de point - Formule de Varignon*

L'équiprojectivité démontrée sur un solide indéformable est équivalente à la relation de changement de point (ou formule de Varignon) :

$$\overrightarrow{V_{B\in S/R_0}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$$

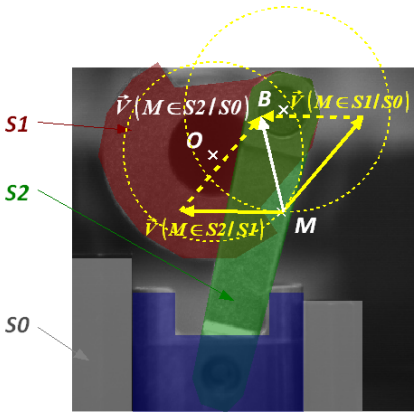
5.2.3 Composition des vecteurs vitesse

Si on prend l'exemple d'un système bielle-manivelle, on peut définir 3 mouvements différents : Mvt_{S_2/S_0} (mouvement de S_2/S_0), Mvt_{S_2/S_1} et Mvt_{S_1/S_0}.

Nous avons déjà vu que par composition des vecteurs taux de rotation, on avait : $\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_0}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}}$

Pour les vecteurs vitesses linéaires, on a également composition des vitesses : $\overrightarrow{V_{M\in S_2/S_0}} = \overrightarrow{V_{M\in S_2/S_1}} + \overrightarrow{V_{M\in S_1/S_0}}$ avec :

- $\overrightarrow{V_{M\in S_2/S_0}}$ la vitesse absolue du point M
- $\overrightarrow{V_{M\in S_2/S_1}}$ la vitesse relative du point M
- $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S_0}}$ la vitesse d'entraînement du point M



5.2.4 Antisymétrie du vecteur vitesse

Propriété *Antisymétrie*

Le vecteur vitesse est antisymétrique (/ à ses repères de référence) : $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S_0}} = -\overrightarrow{V_{M\in S_0/S_1}}$

5.3 Accélération d'un solide

5.3.1 Formule de changement de point

Soient A et B deux points du solide S (associé à un repère R_S). Connaissant l'accélération de A appartenant à S par rapport à R_0, on souhaite déterminer l'accélération du point B appartenant à S par rapport à R_0. Le résultat est le suivant :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in S/R_0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in S/R_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}}{dt}\right]_{R_{R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}\right)$$

Cette formule n'est pas à connaître !

Remarque : le terme en double produit vectoriel implique que le champ d'accélération **n'est pas** équiprojectif.

5.3.2 Composition des accélérations

Pour l'accélération, on obtient : $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_2/R_0}} = \overrightarrow{\Gamma_{M\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{M\in R_1/R_0}} + 2\,\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$ avec :

- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_2/R_0}}$ est l'accélération absolue du point M ;
- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_2/R_1}}$ est l'accélération relative du point M ;
- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_1/R_0}}$ est l'accélération d'entraînement du point M ;
- $2\,\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$ est l'accélération de Coriolis.

Cette formule n'est pas à connaître (non plus) !

6 Torseur cinématique

6.1 Définition

Un torseur est un outil mathématique, utilisé en mécanique, afin de décrire les champs équiprojectifs (vitesse, moment d'effort ...).

Le torseur est composé de deux vecteurs : une **résultante** (en cinématique, le vecteur taux de rotation) et un **moment** (en cinématique, le vecteur vitesse). Ce sont ses éléments de réduction. Son expression dépend de son point d'écriture.

Définition *Torseur cinématique*

$$\{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} \end{array} \right\}$$

L'intérêt d'un tel outil est qu'il contient toutes les informations pour décrire le mouvement d'un solide par rapport à un autre. Il permet de synthétiser les propriétés obtenues pour les taux de rotation et les vitesses instantanées.

6.2 Propriétés

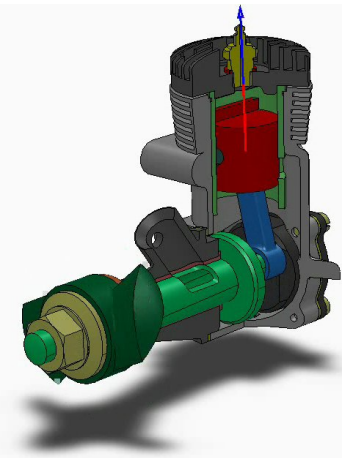
Ces propriétés sont tirées directement des propriétés du vecteur taux de rotation et du vecteur vitesse :

- antisymétrie : $\{\mathcal{V}_{S_1/S_2}\} = -\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\}$
- changement de point : $\{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}} \end{array} \right\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{B\in S/R_0}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \end{array} \right\}$
- composition : $\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\}_M = \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\}_M + \{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\}_M$

Attention

Pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits **au même point**.

7 Mouvements particuliers



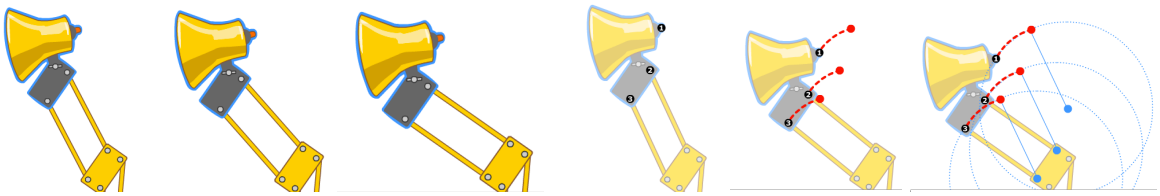
7.1 Mouvement de translation

7.1.1 Définition

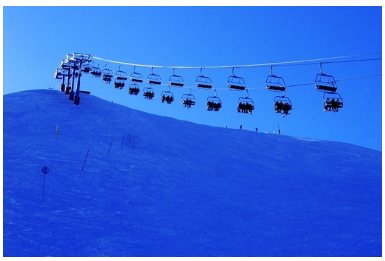
Un solide S est animé d'un mouvement de translation dans un repère R_0 si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ distincts et non colinéaires appartenant à S restent respectivement équipollents (supports parallèles, même sens, même norme) aux vecteurs $\overrightarrow{AB}(t_0)$ et $\overrightarrow{AC}(t_0)$ appartenant au repère R_0.

Il existe plusieurs types de translation :

- rectiligne : la trajectoire des points du solide est une droite (translation du piston du moteur) ;
- circulaire : la trajectoire des points du solide est un cercle (lampe de bureau) ;



- curviligne : pour les autres cas (exemple d'un télésiège).



7.1.2 Propriétés d'un mouvement de translation

Les vecteurs vitesses de tous les points du solide **sont tous égaux** et le vecteur taux de rotation **est nul**.

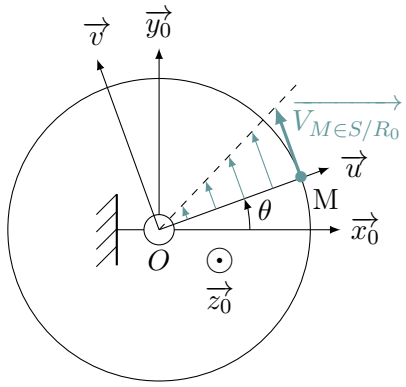
7.1.3 Torseur cinématique

Propriété *Mouvement de translation*

$$\forall t, \qquad \{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} \end{array} \right\}$$

Ce type de torseur est un **torseur couple**. Les éléments de réduction de ce torseur sont les mêmes quel que soit le point où on les exprime.

7.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe



7.2.1 Définition

Un solide S est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe D_0 dans un repère R_0 si deux points distincts A et B appartenant à S coïncident en permanence avec les deux points fixes A_0 et B_0 appartenant à l'axe D_0.

La trajectoire de l'ensemble des points du solide S, est un cercle dans un plan orthogonal à l'axe de rotation, centré sur ce même axe.

7.2.2 Propriété d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Si la position angulaire du mouvement est paramétrée par l'angle θ alors le vecteur taux de rotation vaut $\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$ avec $\overrightarrow{z_0}$ un vecteur directeur de l'axe de rotation.

Si on considère un point M tel que : $\overrightarrow{OM} = z.\overrightarrow{z_0} + R_M.\overrightarrow{u}$. Le vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} = R_M\dot{\theta}.\overrightarrow{v}$.

La vitesse est perpendiculaire à la direction (OM) et proportionnelle à R_M.

7.2.3 Torseur cinématique

Propriété *Mouvement de rotation autour d'un axe fixe*

$$\forall t, \qquad \{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}\\ \overrightarrow{V_{M\in S/R_0}}\end{array}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}\\ R_M\dot{\theta}.\overrightarrow{v}\end{array}\right\}$$

En particulier, sur l'axe de rotation, le torseur est un **glisseur**, c'est-à-dire que :

$$\forall M \in D_0, \qquad \{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$$

7.3 Contact ponctuel

7.3.1 Vitesse de glissement au contact

Définition *Vitesse de glissement au contact*

Soient deux solides S_i et S_k en contact par les surfaces qui les limitent. Les deux surfaces Σ_i et Σ_k sont tangentes en un point I et **le contact est ponctuel**. On appelle vitesse de glissement du solide S_k par rapport au solide S_i au point I :

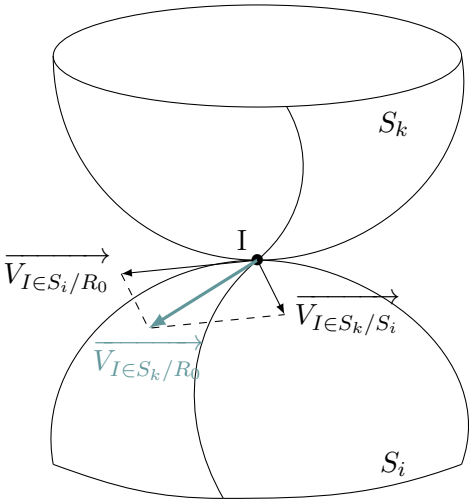
$$\overrightarrow{V_{I\in S_k/S_i}} = \overrightarrow{V_{I\in S_k/R_0}} - \overrightarrow{V_{I\in S_i/R_0}}$$

La vitesse de glissement est la différence des vecteurs vitesse des molécules des solides S_i et S_k qui sont en contact au point I, donc de deux vecteurs vitesse instantanée. Elle dépend donc du temps. On peut établir les propriétés suivantes :

- La vitesse de glissement est indépendante du repère de référence. En effet nous pouvons écrire la décomposition de la vitesse de glissement par rapport à n'importe repère :

$$\overrightarrow{V_{I\in S_k/S_i}} = \overrightarrow{V_{I\in S_k/R_0}} - \overrightarrow{V_{I\in S_i/R_0}} = \overrightarrow{V_{I\in S_k/R_?}} - \overrightarrow{V_{I\in S_i/R_?}}$$

- La vitesse de glissement du solide S_k par rapport au solide S_i, au point I, est contenue dans le plan tangent commun aux deux solides S_i et S_k au point I, ie : $\overrightarrow{V_{I\in S_k/S_i}}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{n}$ la normale au plan tangent (sinon il y aurait interpénétration entre les deux solides).



Attention

Pour calculer la vitesse de glissement, on ne doit jamais dériver le vecteur position, mais utiliser la composition des vitesses et la relation de changement de point.

Définition *Roulement sans glissement*

Quand dans les hypothèses, on supposera qu'il y a roulement sans glissement au point de contact I pour le mouvement de S_k par rapport à S_i, il faudra écrire la relation suivante :

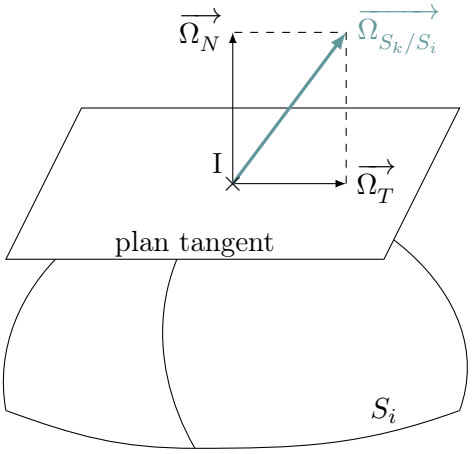
$$\overrightarrow{V_{I\in S_k/S_i}} = \overrightarrow{0}$$

Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse de glissement est nulle.

7.3.2 Vecteur roulement – Vecteur pivotement

Soient $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\overrightarrow{\Omega_N}$ les projections de $\overrightarrow{\Omega_{S_k/S_i}}$, respectivement, sur le plan tangent commun aux deux solides S_i et S_k et sur la normale à ce plan.

$\overrightarrow{\Omega_N}$ est appelé vecteur pivotement du solide S_k par rapport au solide S_i. $\overrightarrow{\Omega_T}$ est appelé vecteur roulement du solide S_k par rapport au solide S_i.

D'après la figure, nous pouvons écrire :

- $\overrightarrow{\Omega_N} = \left(\overrightarrow{\Omega_{S_k/S_i}}.\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$
- $\overrightarrow{\Omega_T} = \overrightarrow{n} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S_k/S_i}} \wedge \overrightarrow{n}\right)$