TD Transfert
Éléments d'inertie des surfaces

Travail demandé

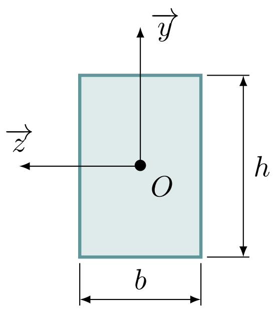
Pour l'ensemble des surfaces suivantes :

Question 1 Déterminer la position du centre de gravité G.

Question 2 Calculer les moments quadratiques $I_{G_y}(S)$ et $I_{G_z}(S)$.

Question 3 Calculer le moment quadratique polaire en G : $I_G(S)$.

1 Exercice 1



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

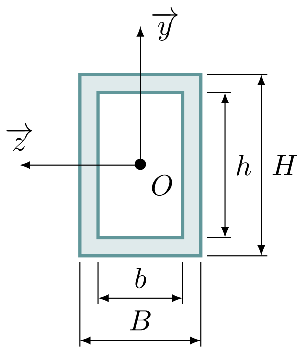
$$I_{G_z}(S) = \int_S y^2 dS = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_z}(S) = \frac{bh^3}{12}}$$

Par analogie : $\boxed{I_{G_y}(S) = \frac{b^3h}{12}}$

Question 3

$$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{bh^3 + hb^3}{12}}$$

2 Exercice 2



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

Rectangle plein **1** : $I_{G_z}(S_1) = \dfrac{BH^3}{12}$ et $I_{G_y}(S_1) = \dfrac{B^3H}{12}$

Rectangle creux **2** : $I_{G_z}(S_2) = \dfrac{bh^3}{12}$ et $I_{G_y}(S_2) = \dfrac{b^3h}{12}$

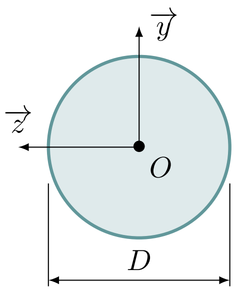
Or : $I_{G_z}(S) = I_{G_z}(S_1) - I_{G_z}(S_2)$

On a donc : $\boxed{I_{G_y}(S) = \dfrac{B^3H - b^3h}{12}}$ et $\boxed{I_{G_z}(S) = \dfrac{BH^3 - bh^3}{12}}$

Question 3

$$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{B^3H - b^3h + BH^3 - bh^3}{12}}$$

3 Exercice 3



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

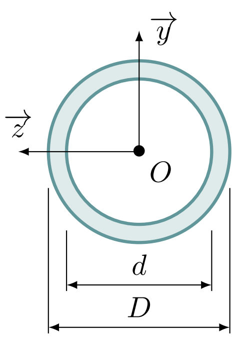
Par symétrie : $I_{G_y}(S) = I_{G_z}(S)$

$$I_{G_z}(S) = \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} y^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 (\sin\theta)^2 r dr d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_y}(S) = I_{G_z}(S) = \frac{\pi D^4}{64}}$$

Question 3

$$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{\pi D^4}{32}}$$

4 Exercice 4



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

Disque plein **1** : $I_{G_y}(S_1) = I_{G_z}(S_1) = \dfrac{\pi D^4}{64}$

Disque creux **2** : $I_{G_y}(S_2) = I_{G_z}(S_2) = \dfrac{\pi d^4}{64}$

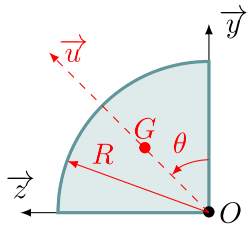
Or : $I_{G_z}(S) = I_{G_z}(S_1) - I_{G_z}(S_2)$

On a donc : $\boxed{I_{G_y}(S) = I_{G_z}(S) = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{64}}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32}}$

5 Exercice 5



Question 1

La surface est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$ quand $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit : $\overrightarrow{OG} = r_G(\vec{y} + \vec{z})$

1re méthode : On va déterminer r_G par intégration : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S \overrightarrow{OM}\, dS$

$\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{y} + \sin\theta\,\vec{z})$. On va travailler en projection sur y, en coordonnées polaire ($dS = r dr d\theta$).

$r_G = \dfrac{4}{\pi R^2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \dfrac{4R}{3\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{4R}{3\pi}(\vec{y} + \vec{z})}$

2e méthode : On va déterminer r_G par le théorème de Guldin : $V = \alpha . r_G . S$

On considère $V = \dfrac{2}{3}\pi R^3$ le volume de la demi-sphère engendrée par la rotation de $\alpha = 2\pi$ de la surface $S = \dfrac{\pi R^2}{4}$ autour de $(O, \vec{y})$.

On a donc immédiatement : $r_G = \dfrac{V}{\alpha S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_G = \dfrac{4R}{3\pi}}$

Question 2

Pour des raisons de facilité de calcul, on va tout d'abord chercher les moments quadratiques en O puis on les déplacera en G grâce au théorème de Huygens.

$I_{O_z}(S) = \displaystyle\int_S y^2 dS$ avec $z = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad I_{O_z}(S) = \displaystyle\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$

Soit : $\boxed{I_{O_z}(S) = \dfrac{\pi R^4}{16}}$ et par symétrie : $\boxed{I_{O_y}(S) = I_{O_z}(S)}$

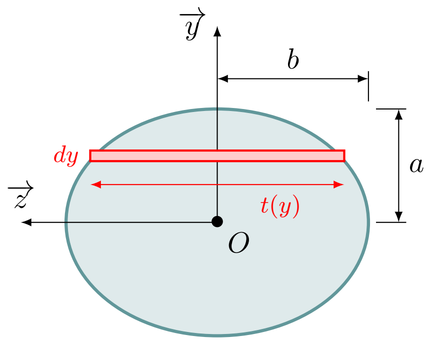
Th. de Huygens : $I_{O_z}(S) = I_{G_z}(S) + y_G^2 S \quad \Rightarrow \quad I_{G_z}(S) = I_{O_z}(S) - y_G^2 S$ (si, si !)

Comme : $y_G = r_G = \dfrac{4R}{3\pi}$ et $S = \dfrac{\pi R^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_y}(S) = I_{G_z}(S) = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) R^4}$

Question 3

En faisant la somme des 2 moments quadratiques en G : $\boxed{I_G(S) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{16}{9\pi}\right) R^4}$

6 Exercice 6



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

On cherche : $I_{G_z}(S) = \int_S y^2 dS$

L'équation cartésienne de l'ellipse est : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$

En posant : $t(y) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$ on peut définir un petit élément de surface par : $dS = t(y)dy$

Alors : $I_{G_z}(S) = \int_{-a}^{a} y^2 t(y) dy = \int_{-a}^{a} y^2 \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} dy$

On propose le changement de variable : $y = a\sin\theta$ avec $y \in [-a, a] \quad \Rightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On en déduit : $I_{G_z}(S) = \frac{2b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta = 2a^3 b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$

Or : $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$ et $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

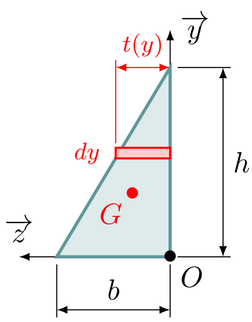
Alors : $I_{G_z}(S) = \frac{a^3 b}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{a^3 b}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_z}(S) = \frac{\pi a^3 b}{4}}$

Par analogie : $\boxed{I_{G_y}(S) = \frac{\pi a b^3}{4}}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{\pi(ab^3 + a^3 b)}{4}}$

7 Exercice 7



Question 1

On va déterminer y_G et z_G par le théorème de Guldin : $V = \alpha.r_G.S$

Pour y_G : $V = \frac{\pi b h^2}{3}$ le volume du cône engendré par la rotation de $\alpha = 2\pi$ de la surface $S = \frac{bh}{2}$ autour de $(O, \vec{z}) \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{h}{3}$

Par analogie : $z_G = \dfrac{b}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{h}{3}\overrightarrow{y} + \dfrac{b}{3}\overrightarrow{z}}$

Question 2

On va d'abord calculer les moments quadratiques en O, puis on les « déplacera » en G avec Huygens.

On pose : $t(y) = b\left(1 - \dfrac{y}{h}\right)$ et $dS = t(y)dy$

Alors : $I_{O_z}(S) = \displaystyle\int_S y^2 dS = b\int_0^h y^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)dy = \frac{bh^3}{12}$

Par analogie : $I_{O_y}(S) = \dfrac{b^3 h}{12}$

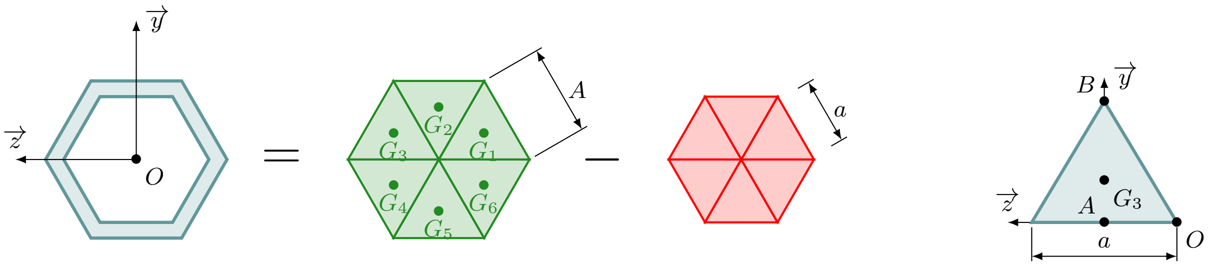
Th. de Huygens : $I_{O_z}(S) = I_{G_z}(S) + y_G^2 S \quad \Rightarrow \quad I_{G_z}(S) = I_{O_z}(S) - y_G^2 S$ (de tête !)

Soit : $I_{G_z}(S) = \dfrac{bh^3}{12} - \left(\dfrac{h}{3}\right)^2 \dfrac{bh}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_z}(S) = \dfrac{bh^3}{36}}$ et par analogie : $\boxed{I_{G_y}(S) = \dfrac{b^3 h}{36}}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \dfrac{bh^3 + b^3 h}{36}}$

8 Exercice 8



Question 1

Immédiat : $\boxed{G = O}$

Question 2

Travail sur les triangles

On décompose l'hexagone en 6 triangles équilatéraux de côté a (voir ci-dessus). De par les propriétés du triangle équilatéral, on a : $\overrightarrow{OG_3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{y} + \dfrac{a}{2}\overrightarrow{z}$ et $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

D'après le résultat de l'exercice 7, par symétrie selon $(A, \overrightarrow{y})$: $I_{G3_y}(S_3) = I_{G3_z}(S_3) = \dfrac{a^4\sqrt{3}}{96}$

On déplace ces moments quadratiques en O :

Th. de Huygens : $I_{O_y}(S_3) = I_{G3_y}(S_3) + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 S_3 \quad \Rightarrow \quad I_{O_y}(S_3) = \dfrac{7a^4\sqrt{3}}{96}$

Th. de Huygens : $I_{O_z}(S_3) = I_{G3_z}(S_3) + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 S_3 \quad \Rightarrow \quad I_{O_y}(S_3) = \dfrac{a^4\sqrt{3}}{32}$

De même, on trouve : $I_{B_y}(S_3) = I_{G3_y}(S_3) = \dfrac{a^4\sqrt{3}}{96}$ et $I_{B_z}(S_3) = \dfrac{3a^4\sqrt{3}}{32}$

Retour à l'hexagone...

Par symétrie, on peut dire :

- $I_{O_y}(S_1) = I_{O_y}(S_3) = I_{O_y}(S_4) = I_{O_y}(S_6) = \dfrac{7a^4\sqrt{3}}{96}$
- $I_{O_y}(S_2) = I_{O_y}(S_5) = \dfrac{a^4\sqrt{3}}{96}$
- $I_{O_z}(S_1) = I_{O_z}(S_3) = I_{O_z}(S_4) = I_{O_z}(S_6) = \dfrac{a^4\sqrt{3}}{32}$
- $I_{O_z}(S_2) = I_{O_z}(S_5) = \dfrac{3a^4\sqrt{3}}{32}$

Il suffit maintenant d'additionner le tout : $\boxed{I_{O_y}(S) = \dfrac{5a^4\sqrt{3}}{16}}$ et $\boxed{I_{O_z}(S) = \dfrac{5a^4\sqrt{3}}{16}}$

On aurait pu s'en douter, au vu de la géométrie de la surface...

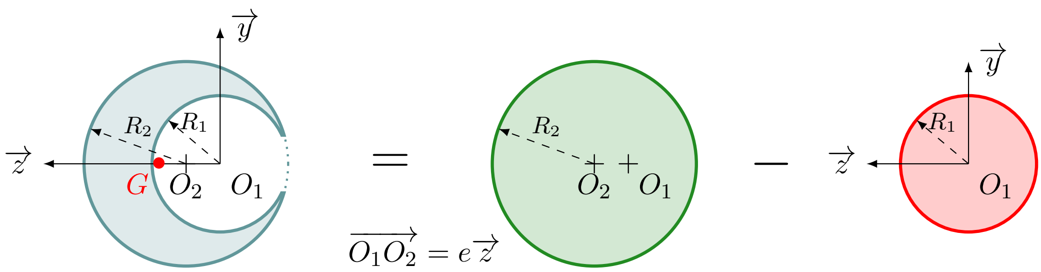
Hexagone creux

Par soustraction : $\boxed{I_{O_y}(S) = \dfrac{5(A^4 - a^4)\sqrt{3}}{16}}$ et $\boxed{I_{O_z}(S) = \dfrac{5(A^4 - a^4)\sqrt{3}}{16}}$

Question 3

Immédiat : $\boxed{I_O(S) = \dfrac{5(A^4 - a^4)\sqrt{3}}{8}}$

9 Exercice 9



Question 1

$S_2 = \pi R_2^2$ et $S_1 = \pi R_1^2$

Centre de gravité : $\overrightarrow{O_1G} = \dfrac{S_2}{S_2 - S_1} e\,\overrightarrow{z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{z_{1G} = ke}$ et $\boxed{z_{2G} = -(1+k)e}$ avec $k = \dfrac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$

Question 2

$I_{O1_y}(S_1) = I_{O1_z}(S_1) = \dfrac{\pi R_1^4}{4}$ et $I_{O2_y}(S_2) = I_{O2_z}(S_2) = \dfrac{\pi R_2^4}{4}$

Th. de Huygens : $I_{G_y}(S_1) = I_{O1_y}(S_1) - (z_{1G})^2 S_1$ $\Rightarrow$ $I_{G_y}(S_1) = \pi R_1^2 \left(\dfrac{R_1^2}{4} + e^2 k^2 \right)$

Th. de Huygens : $I_{G_y}(S_2) = I_{O2_y}(S_2) - (z_{2G})^2 S_2 \quad \Rightarrow \quad I_{G_y}(S_2) = \pi R_2^2 \left(\frac{R_2^2}{4} + e^2(1+k)^2 \right)$

$I_{G_z}(S_1) = I_{O1_z}(S_1)$ et $I_{G_z}(S_2) = I_{O2_z}(S_2)$

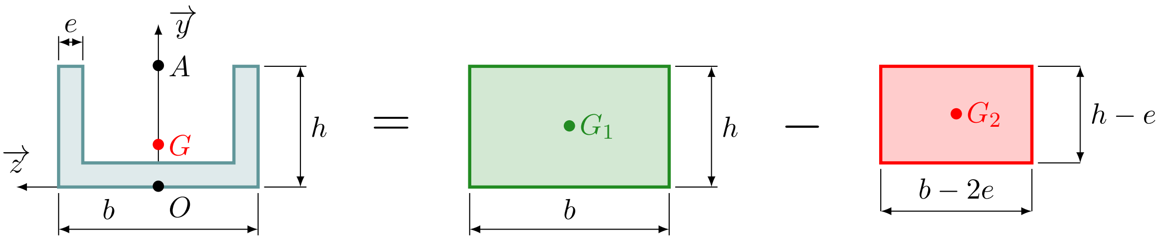
On fait les soustractions :

$$\boxed{I_{G_y}(S) = \pi R_2^2 \left(\frac{R_2^2}{4} + e^2(1+k)^2 \right) - \pi R_1^2 \left(\frac{R_1^2}{4} + e^2k^2 \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{G_z}(S) = \frac{\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)}$$

Question 3

$$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi R_2^2 \left(\frac{R_2^2}{4} + e^2(1+k)^2 \right) - \pi R_1^2 \left(\frac{R_1^2}{4} + e^2k^2 \right) + \frac{\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)}$$

10 Exercice 10



Calculs préliminaires

$S_1 = bh$	$y_{G_1} = \frac{h}{2}$	$I_{G1_y}(S_1) = \frac{b^3h}{12}$	$I_{A_z}(S_1) = \frac{bh^3}{3}$
$S_2 = (b-2e)(h-e)$	$y_{G_2} = \frac{e+h}{2}$	$I_{G2_y}(S_2) = \frac{(b-2e)^3(h-e)}{3}$	$I_{A_z}(S_2) = \frac{(b-2e)(h-e)^3}{3}$

Question 1

$$(S_2 - S_1)\overrightarrow{OG} = S_2\overrightarrow{OG_2} - S_1\overrightarrow{OG_1} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} = y_G\,\overrightarrow{y} \quad \text{avec} \quad \boxed{y_G = \frac{\frac{be}{2} - e^2 + h^2}{b - 2e + 2h}}$$

Question 2

G, G_1 et G_2 sont sur $(O, \overrightarrow{y})$, donc : $I_{G_y}(S) = I_{G2_y}(S_2) - I_{G1_y}(S_1) = \boxed{\frac{b^3h}{12} - \frac{(b-2e)^3(h-e)}{3}}$

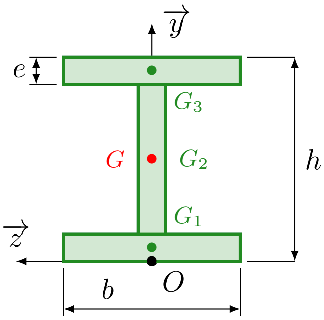
En A : $I_{A_z}(S) = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-2e)(h-e)^3}{3}$

Th de Huygens : $\boxed{I_{G_z}(S) = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-2e)(h-e)^3}{3} - (h-y_G)^2(be + 2eh - 2e^2)}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow$ le résultat est très moche...

11 Exercice 11



Question 1

Immédiat : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{h}{2}\vec{y}}$

Question 2

$S_1 = be$	$y_{G_1} = \frac{e}{2}$	$I_{G1_y}(S_1) = \frac{b^3e}{12}$	$I_{G1_z}(S_1) = \frac{be^3}{12}$
$S_2 = (h-2e)e$	$y_{G_2} = \frac{h}{2}$	$I_{G2_y}(S_2) = \frac{e^3(h-2e)}{12}$	$I_{G2_z}(S_2) = \frac{e(h-2e)^3}{12}$
$S_3 = be$	$y_{G_3} = h - \frac{e}{2}$	$I_{G3_y}(S_3) = \frac{b^3e}{12}$	$I_{G3_z}(S_3) = \frac{be^3}{12}$

G, G_1, G_2 et G_3 sont sur $(O, \vec{y})$, donc : $I_{G_y}(S) = I_{G1_y}(S_1) + I_{G2_y}(S_2) + I_{G3_y}(S_3) = \boxed{\frac{b^3e}{6} + \frac{e^3(h-2e)}{12}}$

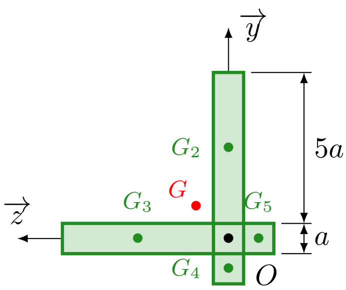
Th de Huygens : $I_{G_z}(S_1) = I_{G_z}(S_3) = \frac{be^3}{12} + \left(\frac{h-e}{2}\right)^2 be$

On a donc : $\boxed{I_{G_z}(S) = \frac{e(h-2e)^3}{12} + \frac{2be^3}{3} + ebh\left(\frac{h}{2} - e\right)}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{b^3e}{6} + \frac{e^3(h-2e)}{12} + \frac{e(h-2e)^3}{12} + \frac{2be^3}{3} + ebh\left(\frac{h}{2} - e\right)}$

12 Exercice 12



Calculs préliminaires

1, 4, 5	$S_1 = a^2$	$G_1 = O$	$I_{G1_y}(S_1) = I_{G1_z}(S_1) = \frac{a^4}{12}$	
2	$S_2 = 5a^2$	$y_{G_2} = 3a$	$I_{G2_y}(S_2) = \frac{5a^4}{12}$	$I_{G2_z}(S_2) = \frac{125a^4}{12}$
3	$S_3 = 5a^2$	$z_{G_3} = 3a$	$I_{G3_y}(S_3) = \frac{125a^4}{12}$	$I_{G3_z}(S_3) = \frac{5a^4}{12}$

Question 1

Par symétrie, on a : $\overrightarrow{OG} = y_G\vec{y} + z_G\vec{z}$ avec : $y_G = z_G$ De plus : $S = \sum S_i = 13a^2$

En projection sur y : $y_G S = y_{G_2}S_2 - y_{G_4}S_4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G = \frac{14a}{13}}$

Question 2

$I_{O_y}(S) = I_{O_y}(S_1) + I_{G2_y}(S_2) + I_{G4_y}(S_4) + I_{G3_y}(S_3) + z_{G_3}^2 S_3 + I_{G5_y}(S_5) + z_{G_5}^2 S_5 = 57a^4$

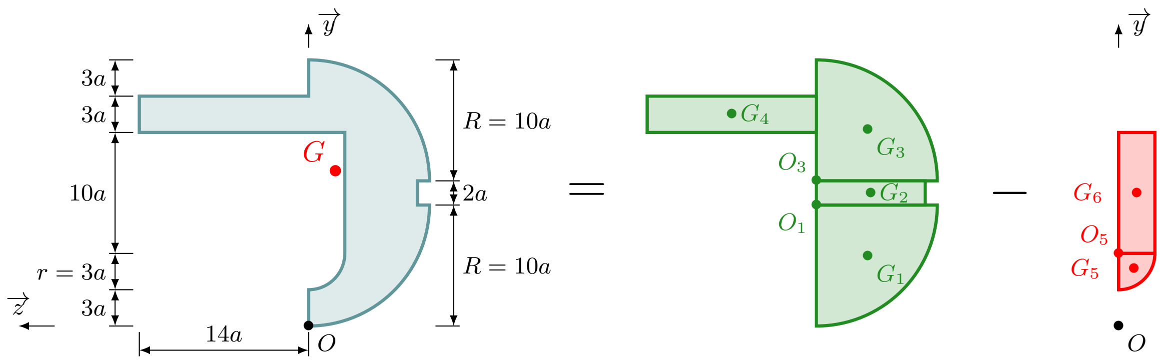
Th. de Huygens : $I_{G_y}(S) = I_{O_y}(S) - z_G^2 S \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{G_y}(S) = \frac{545}{13}a^4}$

Par symétrie, on trouve : $\boxed{I_{G_z}(S) = \dfrac{545}{13}a^4}$

Question 3

$$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = \frac{1090}{13}a^4}$$

13 Exercice 13



Calculs préliminaires

$S_1 = 25\pi a^2$	$\overrightarrow{OG_1} = (10 - \frac{40}{3\pi})a\,\vec{y} - \frac{40}{3\pi}a\,\vec{z}$	$I_{O1_y}(S_1) = I_{O1_z}(S_1) = \frac{10^4\pi}{16}a^4$	
$S_2 = 18a^2$	$\overrightarrow{OG_2} = 11a\,\vec{y} - \frac{9}{2}a\,\vec{z}$	$I_{G2_y}(S_2) = \frac{243}{2}a^4$	$I_{G2_z}(S_2) = 6a^4$
$S_3 = 25\pi a^2$	$\overrightarrow{OG_3} = (12 + \frac{40}{3\pi})a\,\vec{y} - \frac{40}{3\pi}a\,\vec{z}$	$I_{O3_y}(S_3) = I_{O3_z}(S_3) = \frac{10^4\pi}{16}a^4$	
$S_4 = 42a^2$	$\overrightarrow{OG_4} = \frac{35}{2}a\,\vec{y} + 7a\,\vec{z}$	$I_{G4_y}(S_4) = 686a^4$	$I_{G4_z}(S_4) = \frac{63}{2}a^4$
$S_5 = \frac{9\pi a^2}{4}$	$\overrightarrow{OG_5} = (6 - \frac{4}{\pi})a\,\vec{y} - \frac{4}{\pi}a\,\vec{z}$	$I_{O5_y}(S_5) = I_{O5_z}(S_5) = \frac{81\pi}{16}a^4$	
$S_6 = 30a^2$	$\overrightarrow{OG_6} = 11a\,\vec{y} - \frac{3}{2}a\,\vec{z}$	$I_{G6_y}(S_6) = \frac{45}{12}a^4$	$I_{G6_z}(S_6) = 250a^4$

Question 1

Aire totale de la section : $S = \sum_{i=1}^{4} S_i - \sum_{j=5}^{6} S_j = 180a^2$ On pose : $\overrightarrow{OG} = y_G\,\vec{y} + z_G\,\vec{z}$

$$S y_G = \sum_{i=1}^{4} S_i y_{G_i} - \sum_{j=5}^{6} S_j y_{G_j} = \left(\frac{1073}{2} + 612\right)a^3 = 2297a^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G = 12,77a}$$

$$S z_G = \sum_{i=1}^{4} S_i z_{G_i} - \sum_{j=5}^{6} S_j z_{G_j} = -400a^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G = -2,22a}$$

Question 2

Par Huygens : $I_{O_y}(S_2) = 486a^4$ $\quad I_{O_y}(S_4) = 2744a^4$ $\quad I_{O_y}(S_6) = 90a^4$

Or : $I_{O_y}(S) = \sum_{i=1}^{4} I_{O_y}(S_i) - \sum_{j=5}^{6} I_{O_y}(S_j) = 7051,1a^4 \quad \Rightarrow \quad$ (Huygens) $\boxed{I_{G_y}(S) = 6164a^4}$

Par Huygens (décidément), on trouve : $I_{G1_z}(S_1) = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) a^4$

Encore Huygens : $\begin{cases} I_{O_z}(S_1) = 3152a^4 & I_{O_z}(S_2) = 2184a^4 & I_{O_z}(S_3) = 21275a^4 \\ I_{O_z}(S_4) = 12894a^4 & I_{O_z}(S_5) = 163a^4 & I_{O_z}(S_6) = 3880a^4 \end{cases}$

On trouve : $I_{O_z}(S) = 35462a^4 \quad \Rightarrow \quad$ (Huygens) $\boxed{I_{G_z}(S) = 6108a^4}$

Question 3

$I_G(S) = I_{G_y}(S) + I_{G_z}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G(S) = 12272a^4}$

14 Comment éviter ces calculs fastidieux ?

Il n'est généralement pas nécessaire de mener ce genre de calculs pour déterminer les moments quadratiques dans les cas pratiques. Il existe globalement 3 méthodes :

- utiliser les formulaires pour les sections les plus courantes (voir catalogues de profilés par exemple) ;
- faire des approximations, sachant que la marge d'erreur sera bien souvent négligeable au vu des coefficients de sécurités adoptés pour le dimensionnement ;
- utiliser un modeleur volumique pour trouver les propriétés de section (voir ci-dessous un exemple avec Solidworks).