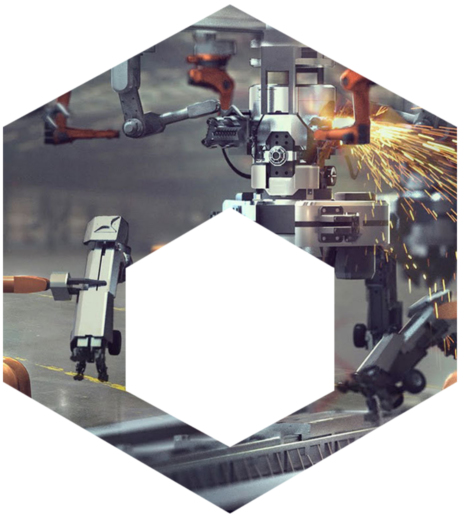
Énergétique

Cours

Réf. Programme: S4123 - Solide indéformable, approche énergétique
Compétences visées: B1-04, C2-18, C2-19, C2-20, C2-21

v1.11

Lycée Richelieu – 64, rue George Sand – 92500 Rueil-Malmaison - Académie de Versailles



Compétences visées :

B1-04	Identifier les pertes d'énergie dans un convertisseur statique d'énergie, dans un actionneur ou dans une liaison
C2-18	Donner la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus
C2-19	Exprimer l'énergie cinétique d'un solide dans un référentiel galiléen
C2-20	Exprimer les puissances extérieures et les inter-efforts
C2-21	Exprimer le théorème de l'énergie-puissance appliqué à tout ou partie des éléments de la chaîne d'énergie

Sommaire

1 Historique - Définition **3**

2 Rappels sur les notions d'Énergie, de Travail et de Puissance **4**

2.1 Énergie ou travail . . . 4

2.2 Puissance . . . 4

3 Travail d'une force au cours d'un déplacement élémentaire **4**

3.1 Travail élémentaire . . . 4

3.2 Travail au cours du déplacement : Énergie cinétique d'un point matériel M (dm) . . . 5

4 Énergie cinétique d'un solide **6**

4.1 Expression générale . . . 6

4.2 Cas particuliers . . . 7

4.3 Cas d'un ensemble de solides . . . 8

5 Notion d'inertie équivalente en rotation par rapport à un axe **8**

5.1 Définition . . . 8

5.2 Intérêt . . . 9

6 Puissance **9**

6.1 Présentation . . . 9

6.2 Puissance développée par une action extérieure à un solide S . . . 9

6.3 Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels (puissance des inter-efforts) . . . 10

7 Théorème de l'Énergie Cinétique **11**

7.1 Pour un solide . . . 11

7.2 Pour un ensemble de solides . . . 12

8 Notion de rendement **13**

8.1 Cas général . . . 13

8.2 En régime établi . . . 14

1 Historique - Définition

En 1686, Leibniz montre que la quantité mv^2, appelée « force vive », se conserve.

En 1788, Lagrange montre l'invariance de la somme de deux quantités, que l'on appellera plus tard « énergie cinétique » et « énergie potentielle ».

Au XIXème siècle, on parvient par une série d'expériences à mettre en évidence des constats (lois) :

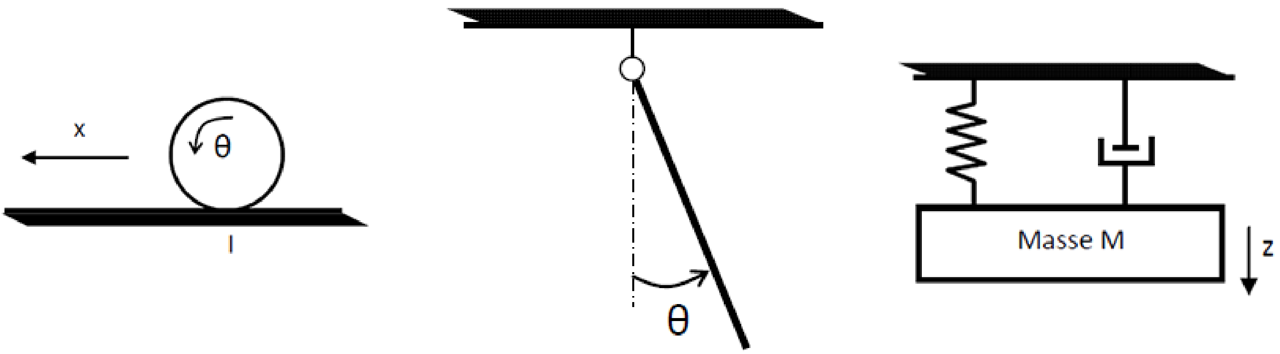
- la chute d'un poids donné d'une même hauteur produit toujours le même échauffement (calorimétrie) ;
- si la vitesse finale n'est pas nulle, la hausse de température est moindre, comme si seulement une partie de la chute était convertie en vitesse et le reste en chaleur ;
- de même un échauffement pourra produire une dilatation, une augmentation de pression, qui elle-même permettra de « travailler » par exemple en déplaçant une masse ;
- le « total » est toujours conservé : ainsi naît le concept scientifique d'énergie.

L'énergie se conserve dans tous les phénomènes, devenant tour à tour, chaleur, pression, vitesse, hauteur, etc. Ainsi, grâce à l'énergie, on peut mettre en relation des observations aussi différentes qu'un mouvement, une rotation, une température, la couleur d'un corps ou d'une lumière, une consommation de sucre ou de charbon, une usure, etc.

Il apparaît également que si l'énergie se conserve et se transforme, certaines transformations sont faciles ou réversibles et d'autres non.

Par exemple, il est facile de transformer de la hauteur de chute en échauffement, et on peut le faire intégralement, en revanche l'inverse est délicat et une partie de l'énergie devra être diffusée, et donc perdue. Cette observation sera à la base de l'idée d'entropie.

Dans notre cas, nous allons montrer, par le biais du Théorème de l'Énergie Cinétique, que les méthodes énergétiques, par une approche globale des calculs, sont plus intéressantes que le P.F.D. dans certains cas particuliers (Systèmes à variable unique. Voir figure 1).



(a) Roulement sans glissement ($x = R \cdot \theta$)

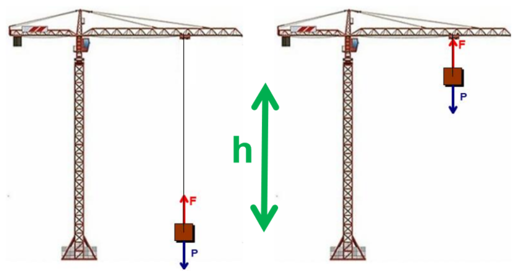
(b) Pendule simple

(c) Système oscillant à 1 degré de liberté

FIGURE 1 – Systèmes à variable unique

2 Rappels sur les notions d'Énergie, de Travail et de Puissance

L'énergie et la puissance sont 2 notions qui, bien que liées sont différentes. Afin de comprendre cette différence, observons la grue ci-contre. Pour lever la charge de poids P, il faut fournir une certaine quantité d'énergie (c'est le travail généré par la force : W).



Remarquons que quelque soit la vitesse de levage de la charge, la quantité totale d'énergie à fournir est toujours la même. Plus la vitesse de levée de la charge est grande, plus la puissance fournie instantanément est grande.

2.1 Énergie ou travail

D'une façon générale, l'énergie ou le travail (en Joule) représente ce qu'il faut fournir à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. La manière dont le chemin est parcouru entre les 2 états n'a pas d'importance.

2.2 Puissance

Elle caractérise le débit d'énergie fourni à chaque instant (instantanément) entre l'état initial et l'état final. Elle ne dépend ni de l'état initial, ni de l'état final du système, mais permet de décrire les flux d'énergie entre ces deux états.

3 Travail d'une force au cours d'un déplacement élémentaire

3.1 Travail élémentaire

Soit une force $\overrightarrow{F}$ dont le point d'application M subit un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

On appelle travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ le produit scalaire :

$$\boxed{dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

avec :

- dW : travail élémentaire exprimé en Joule (J)
- F : Force exprimée en Newton (N)
- dl : déplacement élémentaire exprimé en mètre (m)

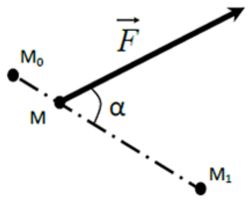


FIGURE 2 – Travail élémentaire de $\overrightarrow{F}$

Remarque

On peut constater que $dW = \left\| \overrightarrow{F} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{dl} \right\| \cdot \cos\alpha$

3.2 Travail au cours du déplacement : Énergie cinétique d'un point matériel M (dm)

Après intégration du travail élémentaire entre deux temps t_1 et t_2 on obtient la relation :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2}$$

On note alors le travail $E_{c(M/R)}$ ou $T_{(M/R)}$ (énergie cinétique du point M dans son mouvement par rapport à R).

Démonstration :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Comme $\dfrac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$ alors $W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dt$

En appliquant le PFD à M, de masse dm, on trouve : $\overrightarrow{F} = dm \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$

Comme $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \left(\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_R$ on a : $\overrightarrow{F} = dm \cdot \left(\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_R$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = dm \cdot \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_R \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$$

or $\left(\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)_R \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right)_R$ $\quad \left(\text{Avec } \left(x^2(t)\right)' = 2x(t) \cdot x'(t)\right)$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} dm \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) \cdot dt$$

$$W = dm \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) \quad \text{(Conservation de la masse)}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2}$$

Remarque *À propos des unités...*

L'unité du système international pour mesurer l'énergie est le joule (J), autrement dit 1 Joule correspond à l'énergie nécessaire pour déplacer 1 N sur 1 m (avec $\alpha = 0\,°$)
Il existe par ailleurs d'autres unités :

- l'électronvolt ($1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$)
- le kilowattheure ($1\,\text{kWh} = 3{,}6\,\text{MJ}$)
- la calorie (4,18 J)
- la Calorie (alimentaire : 4180 J ; notez-là C capitale).

4 Énergie cinétique d'un solide

4.1 Expression générale

L'énergie cinétique d'un solide dans son mouvement est donnée par le relation suivante :

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = \{\mathcal{V}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{C}_{S/R}\}} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c}m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}\end{array}\right\}$$

Soit par définition du comoment : $\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}}$

Attention

Pour le calcul du comoment, les torseurs doivent être exprimés **au même point** !

Démonstration :

Considérant qu'un solide est un ensemble de points matériels, on peut écrire :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2 \cdot dm$$

Soit A un point du solide S :

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm \qquad \text{(Champs des vecteurs vitesses)}$$

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot dm + \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm \quad \text{(Distributivité)}$$

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm + \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm \quad (A \text{ fixe sur } S)$$

Or :

$$\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm = \int_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}} \wedge \overrightarrow{MA}\right) \cdot dm \qquad \text{(Produit mixte)}$$

$$\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right) \cdot dm$$

On obtient alors :

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}} \qquad \left(\text{ident. de } \overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R}\}} \text{ et } \overrightarrow{M_A\{\mathcal{C}_{S/R}\}}\right)$$

Remarque

L'expression de l'énergie cinétique ne dépend pas du point d'écriture.

Démonstration :

On a : $2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$

Soit un point B. On a, avec la formule des champs de moments pour $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$:

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \left(\overrightarrow{V_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)$$

En développant :

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)}_{\overrightarrow{0}}$$

$$2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}}$$

On retrouve bien :

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = \left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\}_B \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\}_B}$$

4.2 Cas particuliers

4.2.1 A est fixe dans R

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(A,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}$$

Démonstration :

On a : $2 \cdot E_{c(S/R)} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$ $\quad \left(\text{car } \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{0}\right)$

Avec : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}} = \left(\bar{\bar{I}}_{(A,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{\overrightarrow{V_{A\in S/R}}}_{\overrightarrow{0}}$

4.2.2 A confondu avec G (centre de gravité)

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(G,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}$$

Démonstration :

$$\text{On a : } 2 \cdot E_{c(S/R)} = \{\mathcal{V}_{S/R}\}_G \otimes \{\mathcal{C}_{S/R}\}_G \quad \text{(Définition)}$$

$$\text{Soit : } 2 \cdot E_{c(S/R)} = \underbrace{\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \cdot m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}_{m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R}}}_{\bar{\bar{I}}_{(G,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

4.2.3 Solide en translation

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2}$$

4.2.4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

En considérant un solide S en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{z}$, et en posant J le moment d'inertie de S autour de l'axe $\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega.\overrightarrow{z}$:

$$\boxed{2 \cdot E_{c(S/R)} = J\omega^2}$$

4.3 Cas d'un ensemble de solides

Pour avoir l'énergie cinétique d'un ensemble de solides $\Sigma = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$:

$$\boxed{E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)} = E_{c(S_1/R)} + E_{c(S_2/R)} + \cdots + E_{c(S_n/R)}}$$

5 Notion d'inertie équivalente en rotation par rapport à un axe

5.1 Définition

Dans le cas d'un système comportant plusieurs pièces en rotation à des vitesses de rotation différentes (et éventuellement certaines en translation), on appelle inertie équivalente ramenée à un axe Δ l'inertie $I_{eq}\Delta$ que devrait avoir cet axe en rotation pour que l'énergie cinétique totale du système de pièces en rotation soit égale à :

$$\boxed{2 \cdot E_{c(\Sigma/R)} = I_{eq\Delta} \cdot \omega_{\Delta}^2}$$

5.2 Intérêt

L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur permet d'estimer rapidement le dimensionnement d'un actionneur.

6 Puissance

6.1 Présentation

La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. Cela correspond donc à un débit d'énergie : deux systèmes de puissances différentes pourront fournir le même travail (la même énergie), mais le système le plus puissant sera le plus rapide.

La puissance est toujours égale au produit d'une grandeur d'effort (force, couple, pression, tension,...) par une grandeur de flux (vitesse, vitesse angulaire, débit, intensité du courant,...)

L'unité de puissance dans le S.I. est le watt, noté W, qui correspond à un joule fourni par seconde $\left(\mathrm{J.s^{-1}} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}\right)$.

On utilise encore le cheval vapeur dans le cas des moteurs thermiques : $1\,\mathrm{cv} \approx 736\,\mathrm{W}$.

6.2 Puissance développée par une action extérieure à un solide S

6.2.1 Expression générale

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array}\right\}$$

Soit :

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Démonstration :

Déterminons la puissance développée par une force élémentaire $\overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}}$ extérieure à un ensemble matériel (S). Par définition, la puissance développée, à la date t, par $\overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}}$ dans le mouvement de (S) par rapport à R est : $dP_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$.

On a alors la puissance développée par Σ, action mécanique extérieure à un solide (S) :

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}}$$

Soit A un point de S

$$P_{\Sigma\to S/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)$$

Comme A est fixe sur S et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ ne dépend pas du point d'écriture, on peut écrire, en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} + \int_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$$

$$P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$$

$$P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}}\right)$$

Comme $\int_S \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}}$ et $\int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{\Sigma\to S}}\right) = \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}}$:

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Attention

Ne pas confondre avec l'énergie cinétique !!!

Remarque

La puissance exprimée n'a de sens que par rapport à un repère. Ainsi la puissance développée par l'action mécanique extérieure Σ sur S est nulle dans tout repère lié à (S).

6.2.2 Cas particuliers

- Lorsque le torseur d'actions mécaniques est un **glisseur**, la puissance est :

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}}} \iff \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{V}}$$

- Lorsque le torseur d'actions mécaniques est un **torseur couple**, la puissance est :

$$\boxed{P_{\Sigma\to S/R} = \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\Sigma\to S}\}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}} \iff \boxed{P = \vec{C} \cdot \vec{\omega}}$$

6.3 Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels (puissance des inter-efforts)

La puissance développée par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels (E_1) et (E_2) (ou puissance des inter-efforts entre (E_1) et (E_2)) est :

$$\boxed{P_{E_1\leftrightarrow E_2} = P_{E_1\to E_2/R} + P_{E_2\to E_1/R}}$$

Propriété

La puissance développée par les actions mutuelles entre (E_1) et (E_2) est indépendante du repère R.

Démonstration :

$P_{E_2\to E_1/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2\to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in E_1/R}}$

$P_{E_2\to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2\to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in E_1/R_1}}$

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2\to E_1}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{M\in E_1/R}} - \overrightarrow{V_{M\in E_1/R_1}}\right)$

Comme : $\overrightarrow{V_{M\in E_1/R}} = \overrightarrow{V_{M\in E_1/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$, on a $\overrightarrow{V_{M\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{M\in E_1/R}} - \overrightarrow{V_{M\in E_1/R_1}}$ d'où :

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2\to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} = \{\mathcal{T}_{E_2\to E_1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$

Par analogie :

$P_{E_1\to E_2/R} - P_{E_1\to E_2/R_1} = \{\mathcal{T}_{E_1\to E_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} + P_{E_1\to E_2/R} - P_{E_1\to E_2/R_1} = [\{\mathcal{T}_{E_1\to E_2}\} + \{\mathcal{T}_{E_2\to E_1}\}] \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$

Or $\{\mathcal{T}_{E_1\to E_2}\} = \{\mathcal{T}_{E_2\to E_1}\}$ (principe des actions réciproques)

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} + P_{E_1\to E_2/R} - P_{E_1\to E_2/R_1} = \{0\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$

$P_{E_2\to E_1/R} - P_{E_2\to E_1/R_1} = 0$

$\boxed{P_{E_2\to E_1/R} = P_{E_2\to E_1/R_1}}$

Remarque

- Si la puissance est négative, c'est une puissance perdue par frottement.
- Si la liaison entre S_1 et S_2 est parfaite alors $P_{S_1\leftrightarrow S_2} = 0$
- La puissance s'exprime en Watt (W), correspondant à des $\mathrm{J.s^{-1}} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$

7 Théorème de l'Énergie Cinétique

7.1 Pour un solide

Le Théorème de l'Énergie Cinétique, appelé parfois Théorème Énergie/Puissance ou Théorème de la Puissance Cinétique s'énonce comme suit :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures au solide.

Démonstration :

D'après le PFD : $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} = \{\mathcal{D}_{S/R}\}$

D'où : $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$

Et : $P_{\bar{S}\to S/R} = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$ (Définition de la puissance)

Posons B tel que :

$$B = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm \end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array}\right\}$$

$$B = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm$$

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm \qquad (A \text{ fixe sur } S)$$

En utilisant le champ des vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$, on a :

$$B = \int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm$$

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, et en sachant que $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ ne dépend pas du point d'écriture :

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm + \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AM} \cdot dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm}_{0}$$

D'où : $B = \displaystyle\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \cdot dm$

$$B = \int_S \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) \cdot dm \qquad \left(\text{car } \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)\right)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(2 \cdot E_{c(S/R)}\right) = \frac{d}{dt}\left(E_{c(S/R)}\right) \qquad \left(\text{Déf. de l'}E_c : 2 \cdot E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2 \cdot dm\right)$$

On en déduit alors le Théorème de l'Énergie Cinétique :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}}$$

7.2 Pour un ensemble de solides

Soit un ensemble (E) de n solides S_1, S_2,. . .,S_n. Pour un solide S_i de (E), le Théorème de l'Énergie Cinétique s'écrit :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}}$$

Alors pour n solides on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)}\right) = \sum_{i=1}^{n} P_{\bar{S}_i \to S_i/R}}$$

- Le premier membre correspond à l'Énergie Cinétique de l'ensemble (E).
- Le second membre correspond à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à **CHAQUE** solide, c'est à dire à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (E) **PLUS** la somme des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

On peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{c(E/R)}\right) = P_{\bar{E} \to E/R} + \sum_{i,j=1}^{n} P_{S_i \leftrightarrow S_j}}$$

On peut aussi l'exprimer en faisant intervenir les travaux entre t_1 et t_2 :

$$E_{c(E/R)}(t_2) - E_{c(E/R)}(t_1) = W_{t_1}^{t_2}\left(\bar{E} \to E/R\right) + \sum_{i,j=1}^{n} W_{t_1}^{t_2}(S_i \leftrightarrow S_j)$$

8 Notion de rendement

Pour tout mécanisme, il y a possibilité de « pertes » d'énergie. Cette énergie est dite perdue, ou dégradée, car elle est sous une forme non exploitable par le système, comme la chaleur dissipée par des frottements. En conséquence, quand on fournit une quantité d'énergie à un mécanisme de conversion ou d'adaptation d'énergie, seule une partie sera utilisable en sortie.

8.1 Cas général

De manière générale, le rendement d'un système est le rapport de l'énergie utile (restituée) sur l'énergie fournie au système :

$$\boxed{\eta = \frac{E_{\text{u}}}{E_{\text{fournie}}} \leq 1}$$

Remarque

Le rendement est un nombre compris entre 0 et 1, et peut s'exprimer sous la forme d'un pourcentage.

Si on connait E_{perdue} l'énergie perdue par le système, on peut alors écrire :

$$\eta = \frac{E_{\text{fournie}} - E_{\text{perdue}}}{E_{\text{fournie}}} = 1 - \frac{E_{\text{perdue}}}{E_{\text{fournie}}}$$

8.2 En régime établi

En régime établi, on peut se permettre de raisonner en terme de puissance. Les expressions précédentes deviennent alors :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{u}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Si on connait P_{perdue} la puissance perdue par le système, on peut alors écrire :

$$\eta = \frac{P_{\text{fournie}} - P_{\text{perdue}}}{P_{\text{fournie}}} = 1 - \frac{P_{\text{perdue}}}{P_{\text{fournie}}}$$

Références

[1] A. Meurdefroid : Cours de mécanique, 2013. TSI2 - Lycée Richelieu - Rueil-Malmaison.

[2] A. Chabert : Cours de mécanique, 2012. TSI2 - Lycée Richelieu - Rueil-Malmaison.

[3] P. Berthet : Cours de mécanique, 1998. PT* - Lycée Livet - Nantes.

[4] D. Barreau : Cours de mécanique, 2014. MP-PSI - Lycée A.Daudet - Nîmes.

[5] C. Chèze, M. Delègue et F. Bronsard : *Mécanique 2ème Année MP-PC-PSI-PT-ATS*. Ellipses, 2008.