



## DYNAMIQUE

Formulaire

CPGE

À savoir par cœur !

v1.6

Lycée Jean Zay - 21 rue Jean Zay - 63300 Thiers - Académie de Clermont-Ferrand

1 Torseur des Actions Mécaniques Extérieures appliquées sur  $S$ 

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A, \text{ext} \rightarrow S}} \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \overrightarrow{M_{A, \text{ext} \rightarrow S}} = \overrightarrow{M_{B, \text{ext} \rightarrow S}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}}$$

2 Torseur dynamique de  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$  écrit au point  $A$ 

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{B \in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$

3 Torseur cinétique de  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$  écrit au point  $A$ 

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}} \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{B \in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}$$

Calcul du moment cinétique par la matrice d'inertie :

$$\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}} = \overline{\overline{I}}_{(A,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}$$

## 4 Matrice d'inertie

Forme de la matrice d'inertie en fonction de la forme du solide

- Pour un solide quelconque :  $\overline{\overline{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b$
- Le solide a le plan  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  de symétrie :  $\overline{\overline{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$

- Le solide a 2 plans de symétries perpendiculaires :  $\bar{I}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$
- Le solide a 1 axe de révolution  $(O, \vec{z})$  :  $\bar{I}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s} \left( A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm \right)$

Calcul du moment d'inertie de  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I_\Delta = \vec{u} \cdot \left( \bar{I}_{(O,S)} \cdot \vec{u} \right)$$

**Théorème de Huygens** pour passer du centre de gravité à un autre point  $O$  tel que  $\vec{OG} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$

$$\bar{I}_{(O,S)} = \bar{I}_{(G,S)} + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

## 5 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

$$\overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A \in S/R_g}} \right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}$$

## 6 Principe Fondamental de la Dynamique

- Pour l'isolement d'un solide  $S$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$$

- Pour l'isolement d'un ensemble de solides  $\Sigma = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\}_A = \{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\} + \{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\} + \dots + \{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\}$$

- Théorème de la résultante dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} = m_s \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/R_g}}$$

- Théorème du moment dynamique en A :

$$\sum \overrightarrow{M_{A, \text{ext} \rightarrow S}} = \overrightarrow{\delta_{A \in S/R_g}}$$