CPGE

Dynamique

Cours

v1.51

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay - 63300 Thiers - Académie de Clermont-Ferrand

Compétences visées:

B2-19	Connaître la forme de la matrice d'inertie d'un solide et ses particularités et simplifications en fonction de la forme d'un solide.
B2-21	Interpréter la signification des termes de la matrice d'inertie.
B2-52	Écrire les torseurs cinétique et dynamique d'un système de solides en mouvement par rapport à un repère.
B2-56	Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un système de solides.
C1-05	Déterminer les actions mécaniques désirées.
C1-06	Écrire l'équation différentielle du mouvement.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Un peu d'histoire...

La dynamique est l'étude des relations entre les mouvements d'un solide et leurs causes, autrement dit, un carrefour entre la cinématique et la statique.

De nombreux et illustres scientifiques ont contribué à son étude et au développement des méthodes encore utilisées aujourd'hui. On peut citer (de manière non exhaustive) :

- **Copernic** (Pologne, 1473-1543) : publie le « Traité sur les révolutions des mondes célestes »
- **Kepler** (Allemagne, 1571-1630) : formule les lois de mouvements des planètes :
  - ◇ Loi des orbites (1reloi de Kepler) : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers,
  - ◇ Loi des aires (2eloi de Kepler) : la vitesse aérolaire est constante,
  - ◇ Loi des périodes (3eloi de Kepler) : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse.
- **Galilée** (Italie, 1564-1662) : il établit les lois du pendule, du plan incliné, de la chute des corps et il confirme les affirmations de Copernic grâce à sa lunette astronomique.
- **Huygens** (Hollande, 1629-1695) : notion de moment d'inertie (développe les premières horloges de précision pour la marine royale française) et pendule composé.
- **Newton** (Angleterre, 1642-1727) : développe la théorie de l'attraction universelle, et retrouve par le calcul les lois de Kepler.
- **Lagrange** (France, 1736-1813) : invente la mécanique analytique basée sur le calcul des variations (recherche des conditions d'extremum des fonctions de plusieurs variables).
- **Hamilton** (Irlande, 1805-1865) : invente le concept de vecteur et de ka géométrie vectorielle, rédige un mémoire sur la dynamique.
- **Poinsot** (France, 1777-1859) : résolution analytique de l'étude du mouvement autour d'un point fixe d'un solide soumis à une force passant par ce point.
- **Painlevé** (France, 1863-1933) : rédige un cours de mécanique générale en utilisant les notations et formulations encore en usage.

1.2 Objectifs

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus... et on détermine les mouvements.
- On connaît les mouvements désirés... et on détermine les actions mécaniques engendrées.

On peut ainsi **dimensionner les actionneurs** (moteurs, vérins,...) ainsi que les **pièces** ou **systèmes de pièces** soumises à des accélérations ou décélérations (bielles, suspensions, structures,...).

1.3 Référentiels

Afin d'étudier les mouvements, et plus particulièrement les accélérations et décélérations, il nous faut un référentiel d'espace et de temps qui soit invariant.

On pourrait prendre un référentiel absolu, fixe par rapport à l'ensemble de l'univers, mais cette notion reste très théorique, alors on définit des référentiels qui s'en approchent.

1.3.1 Le référentiel de Copernic

Son origine est le centre d'inertie du système solaire (proche du soleil) dont les axes passent par des étoiles fixent entre elles. En mécanique classique, on admet donc que le référentiel de Copernic est absolu.

1.3.2 Le référentiel Galiléen

Il s'agit d'un référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic. Ce repère est aussi considéré en mécanique Newtonnienne comme absolu.

En négligeant la vitesse de rotation de la terre (1 tr/24 h) et en considérant le rayon de courbure de la trajectoire elliptique de la terre très grand, on peut considérer que le référentiel terrestre (géocentrique) est un référentiel galiléen.

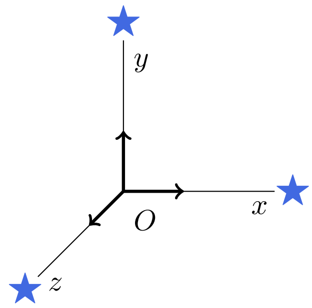


FIGURE 1 – Un référentiel galiléen

1.3.3 Base, repère ou référentiel ?

- **Base :** Outil mathématique. C'est un ensemble de 3 vecteurs définissant 3 directions de l'espace. En mécanique, on utilise de manière systématique des bases orthonormées directes.
- **Repère :** Constitué d'un point origine et d'une base, c'est un outil mathématique qui sert à effectuer les calculs (par projection sur ses axes). En mécanique, on associe généralement au moins un repère à chaque solide.
- **Référentiel :** Constitué d'un repère (avec sa base) et d'une horloge (repère temporel), il permet d'exprimer les mouvements (accélération, vitesse, trajectoire) d'un objet. En mécanique Newtonienne, on assimile souvent (par abus de langage) repère à référentiel.

2 Le Principe Fondamental de la Dynamique

Pour la suite du cours, nous prendrons comme hypothèses (sauf exceptions) :
- référentiels galiléens ;
- principe de conservation de la masse ;
- solide indéformable $\big(\forall (A,B) \in (S)^2$ alors $AB = \text{cste}\big)$;
- liaisons parfaites (pas d'adhérence, ni de frottement).

2.1 Cas du point matériel (rappel de physique)

Soit P, un point matériel de masse m, le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit alors :

$$\exists R_g \; tq : \qquad \boxed{\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to P}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{P/R_g}}} \qquad \text{et} \qquad \sum \overrightarrow{M_{P,\text{ext}\to P}} = \overrightarrow{0}$$

En pratique, on assimilera souvent les billes, ou les pièces de petites dimensions, à des points matériels (embrayage centrifuge, masselotte d'équilibrage,...)

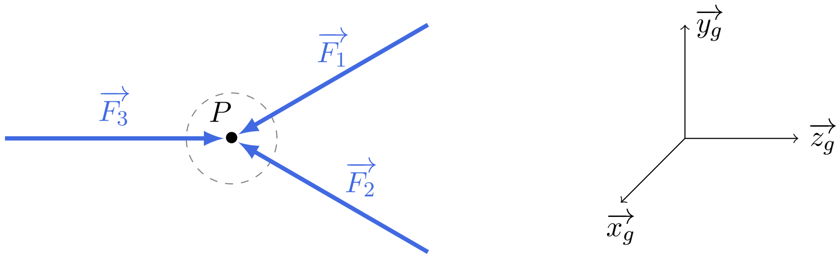


FIGURE 2 – Assimilation d'une bille à un point matériel P

2.2 Cas du solide

On peut en première approche considérer qu'un solide n'est qu'un ensemble de points matériels M affectés de la masse dm.

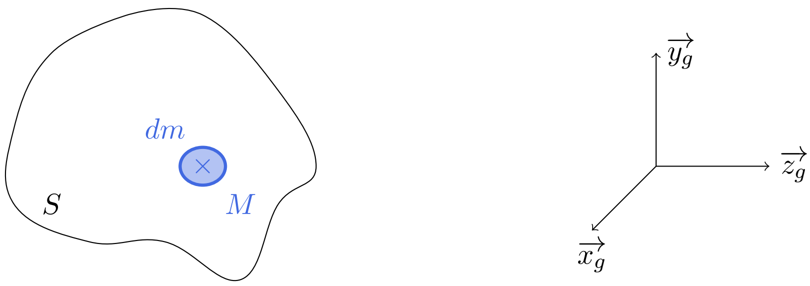


FIGURE 3 – Première approche : S est un ensemble de points matériels

On peut alors écrire :

$$\exists R_g \ tq \ \forall M \in S : \quad \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = dm \, \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} \quad \text{et} \quad \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0}$$

Il reste alors à **généraliser** sur tout le solide pour obtenir la résultante et le moment dynamique en intégrant sur l'ensemble du solide.

2.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide, à savoir :

$$\int_S \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \int_S dm \, \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}$$

En examinant séparément ces deux termes on en déduit que :

$$\int_S \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} \qquad et \qquad \int_S dm \, \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = m \, \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

Démonstration :

$$\int_S dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \int_S \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_{R_g} dm \qquad \left(\text{Acc. d'un pt. mat. : } \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_{R_g}\right)$$

Or la masse ne dépend pas du temps :

$$\int_S dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\int_S \overrightarrow{OM}\,dm\right]_{R_g}$$

Et : $\int_S \overrightarrow{OM}\,dm = m\,\overrightarrow{OG}$ (Définition du centre de gravité)

$$\int_S dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \left[\frac{d^2}{dt^2} m\,\overrightarrow{OG}\right]_{R_g} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \qquad \text{(Conservation de la masse)}$$

On a ainsi le théorème de la résultante dynamique (**à savoir par cœur !**) :

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$$

2.2.2 Théorème du moment dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide, en un point particulier par exemple A point lié à S, à savoir :

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0}$$

On peut alors écrire cette égalité sous la forme :

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$$

Démonstration :

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0}$$

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to M}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0} \qquad \text{(Changement de point du moment)}$$

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0} \qquad \left(M \text{ de masse } dm : \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\right)$$

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm\,\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$$

On a ainsi le théorème du moment dynamique (peu utilisé sous cette forme) :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\,dm}$$

2.2.3 Torseur dynamique

On note : $\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}}$ ou pour alléger l'écriture : $\overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}}$

$\overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}}$ et $\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}}$ forment alors un torseur : le torseur des actions mécaniques extérieures sur S au point A (voir cours de Modélisation des Actions Mécaniques de 1re année) :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}} \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} \end{array} \right\}$$

On rappelle à toute fin utile la relation de transport de moment :

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \overrightarrow{M_{B,\text{ext}\to S}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}}$$

Les deux autres termes $m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ et $\displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm$ forment aussi un torseur, le **torseur dynamique** du solide S par rapport à R_g au point A lié à S.

<u>Démonstration</u> :

> Il faut vérifier que les moments forment un champ de torseur et vérifient la relation correspondante.
>
> On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ avec A et B deux points fixes de S, et M décrivant le solide S.
>
> On peut alors décomposer le terme $\displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm$:
>
> $$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm &= \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm + \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm && \text{(Chasles)} \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm &= \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm + \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm && (AB = \text{cste}) \\ \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm}_{\text{Moment en } A} &= \underbrace{\int_S \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm}_{\text{Moment en } B} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}_{\text{Résultante}} \end{aligned}$$

On peut donc définir le torseur dynamique, par :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm \end{array} \right\}$$

Par convention, on adoptera la notation suivante :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} \end{array} \right\}}$$

La résultante du torseur dynamique $m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ est appelée **quantité d'accélération**.

Comme pour tout torseur, la loi de changement de point des moments est vérifiée :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$$

2.2.4 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Le PFD appliqué au solide S dans son mouvement par rapport à R_g au point A s'écrit alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A}$$

On peut décomposer cette égalité torsorielle en 2 égalités vectorielles :

- Théorème de la résultante dynamique : $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$
- Théorème du moment dynamique en A : $\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}}$

Attention

Il faut déterminer les **deux** torseurs séparément :

- $\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A$ issu du bilan des actions mécaniques extérieures sur S
- $\left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A$ issu de l'étude du mouvement de S par rapport à R_g

...et ensuite faire l'égalité dans le même repère d'écriture et au même point pour obtenir **au maximum** 6 équations scalaires.

2.3 Cas d'un ensemble de solides

Soit un ensemble de solides $\sum = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$.

On peut faire la somme des torseurs, à condition d'être **au même point** par exemple A, on a alors comme expression du PFD :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\sum}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_3/R_g}\right\}_A + ... + \left\{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\right\}_A}$$

Remarque

- Une égalité de torseur correspond à :
  - un système de deux équations vectorielles ;
  - un système de 6 équations scalaires ;
- On peut remarquer qu'en statique le torseur dynamique est nul donc on retrouve bien le PFS.

2.4 Cas particuliers « classiques »

2.4.1 Solide en translation

En calculant le moment dynamique au centre de gravité G de S on obtient : $\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$

Donc le PFD pour un solide en translation écrit au centre de gravité G **uniquement** :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_G = {}_G\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm \qquad \text{(Translation)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm \qquad \text{(Chasles)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \int_S dm + \left(\int_S \overrightarrow{OM} dm\right) \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \qquad (O \text{ et } G \text{ fixes } / \ S)$$

$$\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{GO} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} + m\,\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \qquad \text{(Définition du centre de gravité)}$$

En un point quelconque A lié à S (changement de point entre G et A) : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$

Le PFD pour un solide en **translation** écrit en un **point quelconque** A lié à S donne alors :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \end{array} \right\}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm \qquad \text{(Translation)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} dm \qquad \text{(Chasles)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \int_S dm + \overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} \qquad (O \text{ et } G \text{ fixes } / \ S)$$

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

Remarque

- La résultante de ce torseur est **invariante**.
- Lorsque $A \neq G$, le moment dynamique n'est pas égal au vecteur nul ! sauf si $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ soit tout point appartenant à l'axe de translation passant par G.

2.4.2 Solide en rotation autour d'un axe fixe $(O, \overrightarrow{z})$

On peut écrire le PFD en un point de l'axe de rotation, par exemple O :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\rightarrow S}\}_O = \underset{O}{\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ J\ddot{\theta}.\overrightarrow{z} \end{array}\right\}}}$$

Avec :

- θ : angle définissant la rotation du solide S autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z})$
- J : **moment d'inertie** du solide S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$

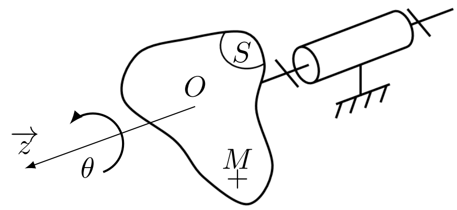


FIGURE 4 – S en rotation autour de $(O, \overrightarrow{z})$

Démonstration :

> Si on note r la distance orthogonale de M à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$, on a alors :
>
> $$\overrightarrow{\delta_{O\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm$$
> $$\overrightarrow{\delta_{O\in S/R_g}} = \int_S r.\overrightarrow{u} \wedge \left(-r\dot{\theta}^2.\overrightarrow{u} + r\ddot{\theta}.\overrightarrow{v}\right) dm = \int_S r^2\ddot{\theta}dm.\overrightarrow{z}$$
>
> Dans ce cas : $J = \int_S r^2 dm \qquad$ unité : $\text{kg}\cdot\text{m}^2$

Si le **centre de gravité** G est porté par l'**axe de rotation** alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\rightarrow S}\}_O = \underset{O}{\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ J\ddot{\theta}.\overrightarrow{z} \end{array}\right\}}}$$

2.5 Cas général

Lorsqu'on ne se trouve pas dans un de ces 2 cas particuliers, le calcul se complique un peu. On est alors amené à passer par la cinétique, discipline construite à partir de la cinématique, dans laquelle on introduit la notion de masse (notamment pour le calcul du torseur dynamique, et dans le cadre de l'utilisation des méthodes énergétiques, pour calculer l'énergie cinétique d'un solide).

3 Torseur cinétique

3.1 Définition

Le torseur cinétique d'un solide en mouvement s'écrit :

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} dm = m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} dm \end{array}\right\}}$$

Par convention, on adoptera la notation suivante :

$$\boxed{\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \end{array}\right\}}$$

$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}$ est bien un torseur. Pour s'en rendre compte, il suffit de transposer la démonstration du chapitre 2.2.3 au torseur cinétique.

La relation de changement de point du moment est aussi valable pour le torseur cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}$$

La résultante du torseur cinétique $m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$ est appelée **quantité de mouvement**.

3.2 Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

3.2.1 Résultantes

On a la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \left[\frac{d\overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}}}{dt}\right]_{R_g} = \left[\frac{d(m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}})}{dt}\right]_{R_g}}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}dm = m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$$

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}dm = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

Or : $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g}$

Soit : $\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \left[\frac{d\overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}}}{dt}\right]_{R_g}$

3.2.2 Moments

On peut écrire la relation suivante (A est un point géométrique quelconque) :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} dm \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm$$

Dérivons le moment cinétique :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} = \int_S \left[\frac{d\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} dm$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} = \int_S \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right]_{R_g} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} dm$$

Or : $\left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right]_{R_g} = \left[\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right]_{R_g} + \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_g} = -\overrightarrow{V_{A/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}}$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} = \int_S \left(-\overrightarrow{V_{A/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}}\right) \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M/R_g}} dm$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} = \int_S \left(-\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}} + \overrightarrow{V_{M/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R_g}}\right) dm + \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} = -\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \int_S \overrightarrow{V_{M/R_g}} dm + \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$$

3.3 Cas particuliers

3.3.1 Le point A est fixe dans le repère R_g

On a alors : $\overrightarrow{V_{A/R_g}} = \overrightarrow{0}$, d'où : $\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g}}$

3.3.2 Les points A et G sont confondus

On a alors : $\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$, d'où : $\boxed{\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g}}$

3.4 Calcul du moment cinétique

3.4.1 Méthode pratique de détermination du moment cinétique

Jusqu'à présent, les expressions du moment cinétique semblent amener des calculs fastidieux. L'objectif de ce chapitre est de trouver une méthode pratique pour le calcul du moment cinétique :

On a : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} dm$

Or : $\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

D'où : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$

Et enfin : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm}$

Par définition, on appelle **opérateur d'inertie** (ou tenseur d'inertie. Voir chapitre suivant) du solide S au point A l'opérateur $\overline{\overline{I}}_{(A,S)}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \overline{\overline{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

Ainsi, l'expression du moment cinétique se simplifie de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overline{\overline{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}}$$

3.4.2 Cas particuliers classiques

- $A = G$, alors : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} = \overline{\overline{I}}_{(G,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$
- $A \in S$ et fixe dans R_g, alors : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overline{\overline{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$

4 L'opérateur d'inertie

4.1 Définition

Nous avons vu au chapitre précédent que l'opérateur d'inertie était défini par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \overline{\overline{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

$\overline{\overline{I}}_{(A,S)}$ est linéaire et est donc représentable dans une base b par une matrice. On peut démontrer que cette matrice est symétrique ; on pose alors par définition :

$$\boxed{\overline{\overline{I}}_{(A,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b}$$

L'opérateur d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'un solide S. On peut voir cet opérateur comme une **description de la répartition des masses dans le solide**.

On peut calculer les différents termes de la matrice par les expressions suivantes, en posant :

$$\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{x} + y.\overrightarrow{y} + z.\overrightarrow{z}$$

Moments d'inertie (kg.m^2)	**Produits d'inertie** (kg.m^2)
$A = \displaystyle\int_S (y^2 + z^2)\, dm$	$D = \displaystyle\int_S yz\, dm$
$B = \displaystyle\int_S (x^2 + z^2)\, dm$	$E = \displaystyle\int_S xz\, dm$
$C = \displaystyle\int_S (x^2 + y^2)\, dm$	$F = \displaystyle\int_S xy\, dm$

Démonstration :

On a : $\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{x} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$

$$\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ -F \\ -E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ -xy \\ -xz \end{pmatrix}$$

Par identification, on trouve alors :

$$A = \int_S (y^2 + z^2)\, dm \qquad F = \int_S xy\, dm \qquad E = \int_S xz\, dm$$

4.2 Moment d'inertie par rapport à un axe

Le moment d'inertie I_Δ d'un solide S par rapport à un axe Δ est (avec Δ passant par O de direction $\overrightarrow{u}$) :

$$I_\Delta = \overrightarrow{u} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{u}\right)$$

Attention

Le produit matriciel $\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{u}$ n'a de sens que si $\bar{\bar{I}}_{(O,S)}$ et $\overrightarrow{u}$ sont exprimés **dans la même base** !

4.3 Base propre d'inertie

Pour tout solide, il existe une base propre d'inertie $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, c'est-à-dire une base dans laquelle l'**opérateur d'inertie** en G (centre de gravité) est **diagonal**.

CC BY NC SA

Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est une base propre d'inertie pour un solide S, les axes $(G, \overrightarrow{x})$, $(G, \overrightarrow{y})$ et $(G, \overrightarrow{z})$ sont des axes principaux (ou axes propres) d'inertie.

En pratique, un **mouvement de rotation** autour d'un de ces axes se fait sans aucune vibration, ni balourd. On dit que le solide est **dynamiquement équilibré**.

Un solide dynamiquement équilibré est statiquement équilibré, le contraire n'est pas toujours vrai ! (solide statiquement équilibré : le centre de gravité est sur l'axe de rotation).

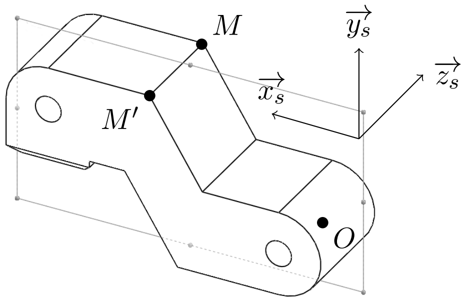
4.4 Propriétés

Le moment d'inertie par rapport à un axe est une **quantité positive** ou au pire considérée négligeable (pour des solides infiniment fins selon une direction).

Un moment d'inertie par rapport à un axe est **minimum** si cet axe passe **par le centre d'inertie du solide**. On ne peut par contre rien dire concernant les produits d'inertie par rapports à des plans.

Lorsque le solide possède un élément de symétrie, l'opérateur d'inertie peut se simplifier.

4.4.1 Un plan de symétrie



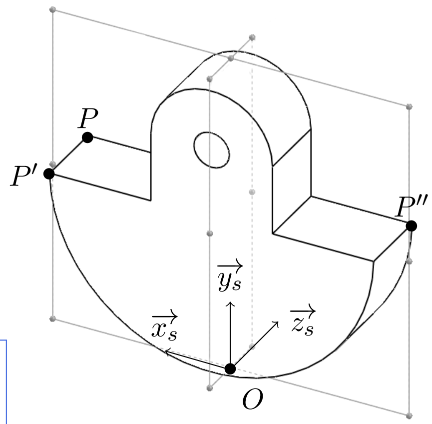
Si $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$ est un plan de symétrie pour le solide, alors en associant deux à deux des points symétriques M et M' de coordonnées (x, y, z) et $(x, y, -z)$ pour calculer les produits d'inertie en O, on montre que :

$$\int_S xz\,dm = \int_S yz\,dm = 0 \quad \text{car} \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z\,dz = 0$$

On a alors comme opérateur :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

4.4.2 Symétrie par rapport à deux plans sécants perpendiculaires



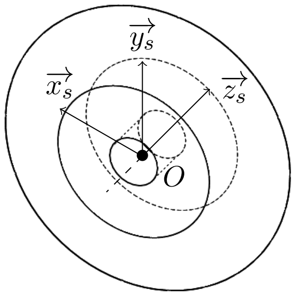
Les produits d'inertie sont tous nuls : $D = 0$, $E = 0$ et $F = 0$, car à chaque élément de volume centré en un point $P\,(x, y, z)$ correspond un élément de volume centré symétriquement :

- soit en un point $P'\,(x, y, -z)$
- soit en un point $P''\,(-x, y, z)$

La matrice d'inertie en un point O appartenant aux 2 plans de symétrie est donc diagonale, sous la forme :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

4.4.3 Axe de révolution



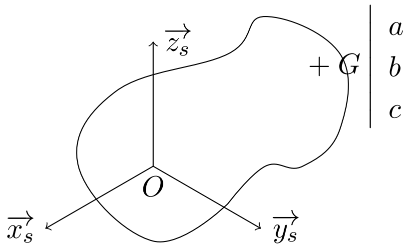
Pour un solide de révolution d'axe $(O, \overrightarrow{z_s})$, la matrice d'inertie est diagonale mais avec la relation supplémentaire :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm \quad \text{car} \quad \int_S x^2 dm = \int_S y^2 dm$$

La matrice d'inertie en un point O appartenant à l'axe de révolution s'écrit donc sous la forme :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

4.5 Théorème de Huygens



Ce théorème permet de trouver l'expression de l'opérateur d'inertie en un point quelconque d'un solide (ici : O) à partir de l'opérateur d'inertie au centre de gravité G.

En posant $\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{x_s} + b.\overrightarrow{y_s} + c.\overrightarrow{z_s}$, le théorème de Huygens donne :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}}$$

<u>Démonstration</u> :

$$\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$

$$\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \int_S \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)\right) dm$$

On fait apparaître ainsi 4 termes à déterminer :

- $\displaystyle\int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{OG}\right) = m \cdot \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$
- $\displaystyle\int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}\right) = \overrightarrow{0} \qquad \left(\text{car} \int_S \overrightarrow{GM} dm = \overrightarrow{0}\right)$
- $\displaystyle\int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{OG}\right) = \overrightarrow{0} \qquad \text{(même raison)}$
- $\displaystyle\int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}\right) = \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \qquad \text{(déf. de la matrice d'inertie en } G\text{)}$

D'où : $\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

Attention

Cette relation n'est **valable** qu'entre **le centre de gravité** G **de** S **et un autre point**. Si on veut passer d'un point A à un point B, il faudra passer d'abord de A à G et ensuite de G à B.

5 Méthodologie de résolution

Comme on l'a indiqué en début de cours, en dynamique on rencontre deux types de problématique :

- les efforts sont connus ; on détermine les mouvements.
- on connaît les mouvements désirés ; on détermine les actions mécaniques engendrées.

Dans tous les cas, il nous faut des équations pour pouvoir relier les actions mécaniques aux paramètres de mouvement. La démarche globale est exposée ci-après.

5.1 Graphe de structure

On repère sur le graphe de liaison les différentes liaisons entre les sous-ensembles considérés.

On place aussi sur ce graphe les actions mécaniques extérieures, afin de connaître les interactions avec l'environnement du système (graphe de structure).

5.2 Isolement

On isole un solide S ou un ensemble de solides $\sum$, autrement c'est à ce stade que l'on va définir ce qui est l'extérieur et l'intérieur du système. La suite de l'étude ne concerne **que les actions extérieures**.

C'est une des phases importantes, permettant de faire ressortir ou au contraire de masquer l'influence de certaines actions mécaniques.

5.3 Inventaire des actions mécaniques extérieures

On réalise alors l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) par rapport à la partie isolée précédemment. On retrouve ce que l'on a déjà établi en statique (actions à distance - actions de contact).

5.4 Écriture du PFD

On écrit le PFD :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to \Sigma}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\right\}_A}$$

Dans le second cas, $\left\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\right\}_A + ...$

5.5 Détermination du torseur dynamique

C'est souvent la partie qui amène le plus de calcul, particulièrement pour les moments.

- Résultante Dynamique : $\boxed{\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$
- Moment Dynamique : $\boxed{\overrightarrow{M_A\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}}$

Ce moment dynamique dépend du mouvement **et** du point d'écriture.

5.5.1 Cas n°1 : S est en translation par rapport à R_g

- Au point G : $\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$
- Au point A : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$

5.5.2 Cas n°2 : S n'est pas en translation par rapport à R_g

- On connaît la matrice d'inertie au point A : $\bar{\bar{I}}_{(A,S)}$
  - ◇ On calcule : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}$
  - ◇ Puis : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + m\left(\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\right)$
- On connaît la matrice d'inertie au point G : $\bar{\bar{I}}_{(G,S)}$
  - ◇ **Méthode 1** : on déplace la matrice de G vers A en utilisant le théorème de Huygens. On est alors ramené au cas précédent.
  - ◇ **Méthode 2** :
    - ○ on calcule le moment cinétique en G : $\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$
    - ○ on déplace ensuite en A : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} + \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$
    - ○ puis on dérive : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$

5.6 Écriture des équations - Résolution

On écrit alors les 6 équations scalaires issues du PFD (ou du moins celles qui permettent de répondre au problème posé). Il faut pour cela écrire les torseurs **au même point** et **dans la même base**.

Si la résolution n'aboutit pas, on peut être amené soit à faire des hypothèses simplificatrices, soit à isoler d'autres solides ou ensembles de solides.

6 Conseils pour le calcul

Il est **inutile** d'exprimer les différents vecteurs dans **les bases globales**.

Pour calculer la composante suivant un axe d'un vecteur, on utilisera souvent la relation suivante :

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_R \cdot \overrightarrow{z} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{z}\right]_R - \overrightarrow{u}\cdot\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z}\right]_R}$$

CC BY NC SA

Cette relation est très utilisée pour le calcul du moment dynamique, si seule la composante suivant $\overrightarrow{z}$ est utile au calcul. Exemple :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\right]_R \cdot \overrightarrow{z} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \cdot \overrightarrow{z}\right]_R - \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z}\right]_R$$

Cette méthode permet de manipuler des calculs **plus simples** et **plus rapides**.

Pour calculer la dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ exprimé dans R_2, on ne projettera pas mais on utilisera la formule de dérivation vectorielle (dite « formule de Bour ») :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \overrightarrow{u}$$

Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à l'axe Δ, noté $I_{S/\Delta}$ se calcule avec la relation ($\overrightarrow{k}$ étant un vecteur unitaire porté par Δ) :

$$I_{S/\Delta} = \overrightarrow{k} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)} . \overrightarrow{k}\right)$$

Références

[1] A. Meurdefroid : Cours de mécanique, 2013. TSI2 - Lycée Richelieu - Rueil-Malmaison.

[2] A. Chabert : Cours de mécanique, 2012. TSI2 - Lycée Richelieu - Rueil-Malmaison.

[3] P. Berthet : Cours de mécanique, 1998. PT* - Lycée Livet - Nantes.

[4] C. Chèze, M. Delègue et F. Bronsard : *Mécanique 2ème Année MP-PC-PSI-PT-ATS*. Ellipses, 2008.