CPGE PTSI-PT Lycée Jean Zay - Thiers

Théorie des mécanismes

Cours

Rappels de PTSI

v2.4

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand

Compétences visées :

A5-04	Justifier le besoin fonctionnel d'une spécification.
B2-01	Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
B2-12	Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
B2-17	Simplifier un modèle de mécanisme.
B2-18	Modifier un modèle pour le rendre isostatique.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Rappels **3**

2.1 Les différents types de schémas 3

2.2 Chaînes de solides 4

2.3 Liaison équivalente 5

3 Modélisation et structure d'une chaine fermée de solide **7**

3.1 Objectif 7

3.2 Le nombre cyclomatique γ 7

4 Approche cinématique de la théorie des mécanismes **7**

4.1 Nombre d'équations cinématiques E_c 7

4.2 Nombre d'inconnues cinématiques de liaisons I_c 8

4.3 Mobilité d'un mécanisme m 8

4.4 Degré d'hyperstatisme h 8

5 Approche statique de la théorie des mécanismes **9**

5.1 Nombre d'équations statiques E_s 9

5.2 Nombre d'inconnues statiques de liaisons I_s 9

5.3 Degré d'hyperstatisme h 10

5.4 Mobilité d'un mécanisme m 10

6 Rendre le mécanisme isostatique ou non ? **11**

6.1 Construire hyperstatique 11

6.2 Rendre l'assemblage isostatique 12

7 Ce qu'il faut (au minimum) retenir **12**

7.1 Récapitulatif 12

7.2 Quelle approche privilégier ? 13

1 Introduction

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides et a pour buts :

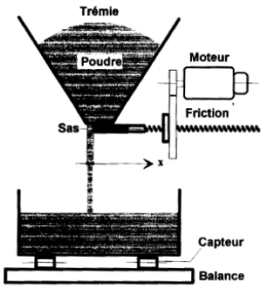
- l'analyse de la structure d'un mécanisme, afin d'émettre un avis sur la pertinence des solutions adoptées pour remplir la fonction mécanique souhaitée ;
- la détermination de la(les) loi(s) entrée-sortie ;
- l'analyse de la transmission d'énergie en vue du dimensionnement des organes mécaniques.

L'analyse des chaines fermées de solides est orientée dans ce cours vers la recherche, d'une part, de caractéristiques telles que l'**iso** ou l'**hyperstatisme** (ou **hyperstaticité**) et, d'autre part, la recherche de solution technologique qui permettent de maitriser ou modifier l'hyperstatisme.

2 Rappels

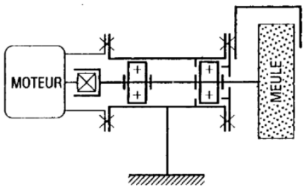
2.1 Les différents types de schémas

2.1.1 Le schéma de principe



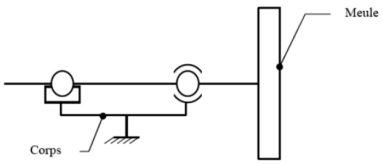
Ce mode de représentation décrit les données strictement nécessaires à la définition du principe de fonctionnement d'une solution.

2.1.2 Le schéma technologique



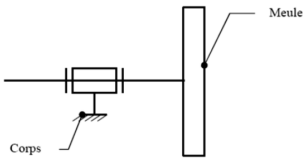
Le schéma technologique est une description de la nature et de l'agencement des principaux composants d'un produit.

2.1.3 Le schéma (cinématique) architectural



Il met en évidence la nature et les positions relatives des différentes liaisons élémentaires.

2.1.4 Le schéma cinématique minimal



Ce mode de représentation met en évidence les mouvements relatifs entre sous-ensembles cinématiques. À la différence du schéma architectural, on ne s'intéresse pas à la réalisation des liaisons mais uniquement aux mobilités. Il est normalisé (norme *NF EN 23-952*).

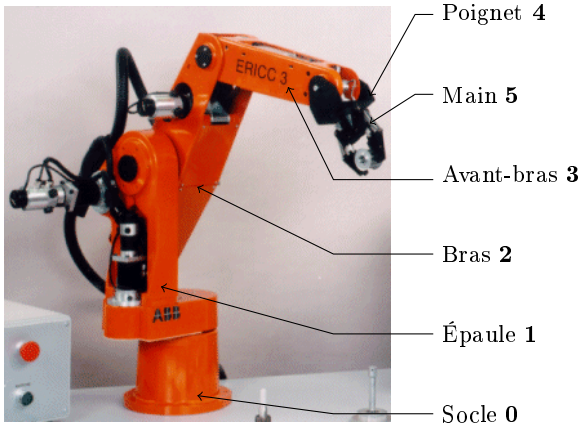
2.2 Chaînes de solides

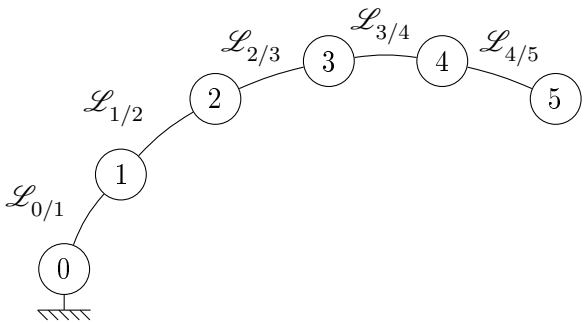
2.2.1 Chaîne ouverte

Une chaîne de solides S_1, S_2, S_3, ..., S_n est dite ouverte si les solides placés à l'extrémité sont **différents**.

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow S_n$$

Exemple : Robot *Ericc 3*



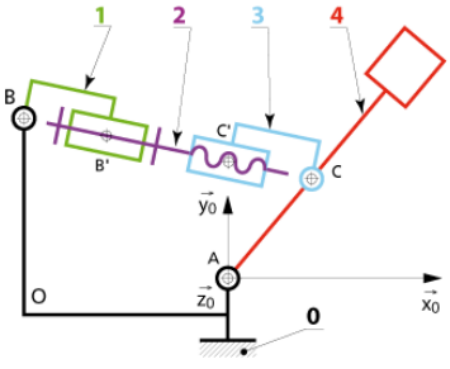


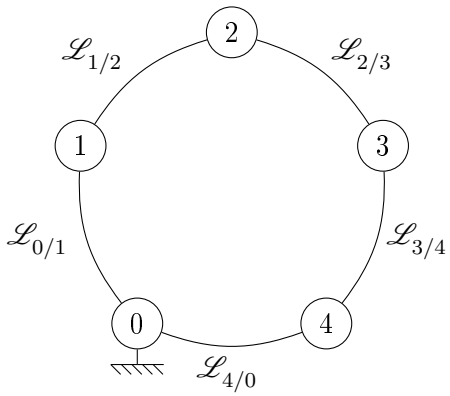
2.2.2 Chaîne fermée

Une chaîne de solides S_1, S_2, S_3, ..., S_n est dite fermée si le solide initial est **le même** que le solide final.

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow S_n \rightarrow S_1$$

Exemple : Bras *Maxpid*

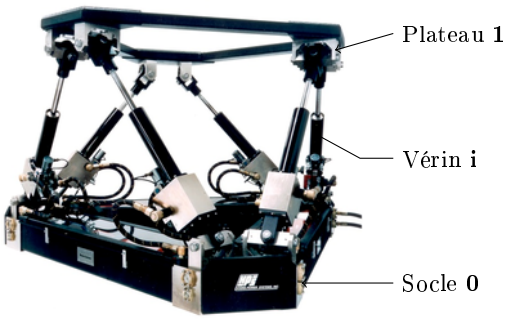


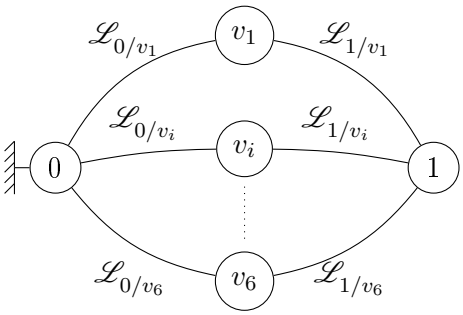


2.2.3 Chaîne complexe

Une chaîne de solides S_1, S_2, S_3, ..., S_n est dite complexe si elle comporte **plusieurs** chaînes ouvertes ou fermées.

Exemple : Plateforme *Stewart*

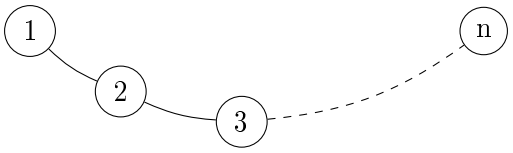




2.3 Liaison équivalente

2.3.1 Liaison en série

On dira que plusieurs solides sont en liaison série si la chaîne de solides est de la forme :



Considérons par exemple une chaîne de trois solides S_1, S_2 et S_3 en liaison série avec des efforts extérieurs uniquement sur S_1

Approche cinématique

On note $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ et $\{\mathcal{V}_{3/2}\}$ les torseurs cinématiques respectifs de S_2 par rapport à S_1 et de S_3 par rapport à S_2.

On peut alors définir un torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{3/1}\}$ de la liaison « cinématique équivalente » entre S_3 et S_1 défini par la loi de composition des vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}\}_A = \{\mathcal{V}_{3/2}\}_A + \{\mathcal{V}_{2/1}\}_A$$
cinématique équivalente
$$(S_1 \leftrightarrow S_2 \leftrightarrow S_3) \Leftrightarrow (S_1 \leftrightarrow S_3)$$

Approche statique

On applique le principe fondamental de la statique à S_1 :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A + \{\mathcal{T}_{S_2\to S_1}\}_A = \{0\} \quad \text{d'où} \quad \{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A = \{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\}_A$$

On applique le principe fondamental de la statique à $\{S_1 + S_2\}$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A + \{\mathcal{T}_{S_3\to S_2}\}_A = \{0\} \quad \text{d'où} \quad \{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A = \{\mathcal{T}_{S_2\to S_3}\}_A$$

On applique le principe fondamental de la statique à S_1 pour la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A + \{\mathcal{T}_{S_3\to S_1}\}_A = \{0\} \quad \text{d'où} \quad \{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_1}\}_A = \{\mathcal{T}_{S_1\to S_3}\}_A$$

Alors :

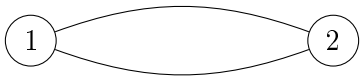
$$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_3}\}_A = \{\mathcal{T}_{S_2\to S_3}\}_A = \{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\}_A$$
statique équivalente
$$(S_1 \leftrightarrow S_2 \leftrightarrow S_3) \Leftrightarrow (S_1 \leftrightarrow S_3)$$

Remarque

Pour qu'une composante du torseur $\{\mathcal{T}_{S_1\to S_3}\}_A$ soit nulle, il faut que toutes les composantes correspondantes des autres torseurs soient nulles.

2.3.2 Liaison en parallèle

On dira que plusieurs solides sont en liaison parallèle si la chaîne de solides est de la forme :



Approche cinématique

Considérons par exemple une chaîne de deux solides S_1 et S_2 en liaison parallèle suivant deux liaisons $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. On note $\left\{\mathcal{V}^{\mathscr{L}_1}_{2/1}\right\}$ et $\left\{\mathcal{V}^{\mathscr{L}_2}_{2/1}\right\}$ les torseurs cinématique de S_2 par rapport à S_1 dans les liaisons respectives $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$.

On peut alors définir un torseur « cinématique équivalent » de S_2 par rapport à S_1 $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$ tel que :

$$\exists M \text{ tq } \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}_M = \left\{\mathcal{V}^{\mathscr{L}_1}_{2/1}\right\}_M = \left\{\mathcal{V}^{\mathscr{L}_2}_{2/1}\right\}_M$$
cinématique équivalente
$$(S_1 \leftrightarrows S_2) \Leftrightarrow (S_1 \leftrightarrow S_2)$$

On en déduira alors des degrés de liberté bloqués dans les liaisons $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, correspondant à des degrés de liaison de la cinématique globale entre S_2 et S_1.

Approche statique

On applique le principe fondamental de la statique à S_2 :

- n liaisons $\mathscr{L}_i$: $\sum \left\{\mathcal{T}^{i}_{S_1\to S_2}\right\} + \{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_2}\} = \{0\}$
- n liaisons équivalente : $\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} + \{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S_2}\} = \{0\}$

D'où :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}_A = \sum_i \left\{\mathcal{T}^{\mathscr{L}_i}_{1\to 2}\right\}_A$$
statique équivalente
$$(S_1 \leftrightarrows S_2) \Leftrightarrow (S_1 \leftrightarrow S_2)$$

Remarque

Pour qu'une composante du torseur $\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\}$ soit différente de zéro, il suffit qu'une seule composante de l'un des $\left\{\mathcal{T}^{\mathscr{L}_i}_{S_1\to S_2}\right\}$ soit différente de zéro (il suffit qu'une seule des liaisons puisse transmettre la composante d'action mécanique).

3 Modélisation et structure d'une chaine fermée de solide

3.1 Objectif

L'analyse des mécanismes a toujours pour point de départ un modèle du mécanisme à étudier. Les schémas les plus couramment utilisés dans ce domaine sont les graphes de liaisons et les schémas cinématiques. **Les résultats de l'analyse dépendent des modèles associés au réel**.

Une chaine fermée de solides est composée de liaisons en série qui forment :

- soit une seule boucle (chaine simple) ;
- soit plusieurs boucles (chaine complexe).

Le nombre de chaines dépend directement **du schéma cinématique et donc des modèles des liaisons adoptés**.

3.2 Le nombre cyclomatique γ

Dans le cas d'une chaine complexe, le nombre de boucles indépendantes, appelé nombre cyclomatique γ, se calcule simplement en faisant la différence entre le nombre de liaisons N_L et le nombre de pièces N_P dans le mécanisme :

$$\boxed{\gamma = N_L - N_P + 1}$$

Remarque

On peut aussi déterminer γ « graphiquement » en comptant le nombre de boucles sur le graphe des liaisons. Et c'est souvent beaucoup plus rapide ! !

4 Approche cinématique de la théorie des mécanismes

La **loi de composition de mouvement** (fermeture cinématique) appliquée à chacune des γ chaines indépendantes du mécanisme permet d'écrire pour chacune :

$$\forall i, \{\mathcal{V}_{i/i}\} = \{0\}$$

4.1 Nombre d'équations cinématiques E_c

Il y a donc autant d'équations torsorielles indépendantes que de chaînes fermées indépendantes. On pose E_c le nombre d'équations scalaires issues de ces équations de fermeture cinématique, donné par :

$$\boxed{E_c = 6\gamma}$$

4.2 Nombre d'inconnues cinématiques de liaisons I_c

Ce nombre se détermine en sommant **les degrés de liberté de chacune des N_L liaisons**. Le nombre d'inconnues dépend donc du modèle adopté pour les liaisons.

Soit à résoudre le système de E_c équations obtenues à I_c inconnues dénombrées. Ce système est un système linéaire homogène, qui peut être écrit sous la forme matricielle ci-contre.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{I_c \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}\right\} E_c \text{ équations} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}}\right\} I_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Mobilité d'un mécanisme m

4.3.1 Signification mathématique

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté $Rg[E_c]$. Le rang désigne le nombre d'équations indépendantes. C'est également le nombre d'équation significative (par exemple une équation $0 = 0$ n'est pas significative).

On définit la mobilité du mécanisme m (entier positif ou nul) :

$$m = I_c - rg[E_c]$$

4.3.2 Signification mécanique

La **mobilité** d'un mécanisme est le nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaître les mouvements de toutes les pièces du mécanisme, ou comme le nombre de paramètres de situation nécessaires pour connaître sa configuration.

On distingue **mobilité utile**, notée m_u, le nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaître les mouvements des pièces d'entrée et de sortie du mécanisme, ou comme le nombre de paramètres de situation nécessaires pour connaître la configuration des pièces d'entrées et de sortie du mécanisme.

On distingue **mobilité interne**, notée m_i, le nombre de mouvements indépendants ne faisant intervenir aucun des paramètres d'entrée-sortie.

On a bien évidemment :

$$\boxed{m = m_u + m_i}$$

4.4 Degré d'hyperstatisme h

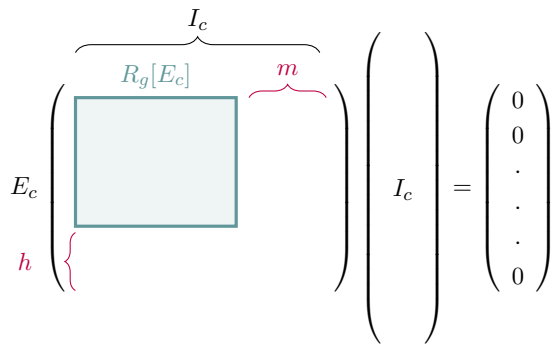
On définit h le degré d'hyperstatisme (ou parfois « d'hyperstaticité ») du mécanisme (entier positif ou nul) :

$$h = E_c - rg[E_c]$$

Mathématiquement, il exprime le nombre d'équations ne servant pas à la résolution. (Le plus souvent de la forme $0 = 0$).

Mécaniquement, il définit le nombre de degrés de liberté à ajouter pour garantir un montage et un fonctionnement sans contrainte du mécanisme.

Finalement, la forme du système d'équation peut être présentée de la manière suivante :



Sachant que :

- $m = I_c - rg[E_c]$
- $h = E_c - rg[E_c]$

On peut écrire :

$$\boxed{h = m - I_c + E_c}$$

5 Approche statique de la théorie des mécanismes

Ce paragraphe détaille une seconde approche de la théorie des mécanismes qui conduit au même résultat que précédemment. Dans ce cours, l'approche est menée en statique, elle se généralise très simplement à la dynamique.

5.1 Nombre d'équations statiques E_s

Une étude statique systématique est menée en étudiant le mouvement ou l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme.

Le mouvement ou l'équilibre étant nécessairement relatif à une de ces pièces, prise comme référentiel, on dénombre alors $N_P - 1$ solides à étudier. (En général, le « -1 » correspond au bâti qui est considéré comme un référentiel galiléen et comme solide de référence pour la dynamique ou l'équilibre. On ne peut donc pas l'isoler).

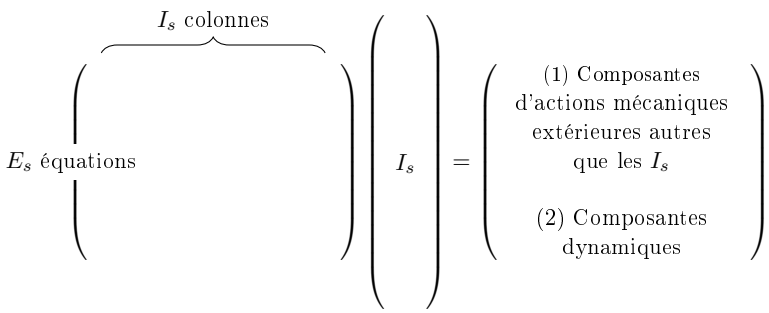
Soit E_s le nombre d'équations scalaires obtenues après une étude exhaustive :

$$\boxed{E_s = 6(N_P - 1)}$$

5.2 Nombre d'inconnues statiques de liaisons I_s

Soit I_s le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons du mécanisme. Ce nombre se détermine en sommant les nombres de paramètres d'actions mécaniques transmissibles par chacune des N_L liaisons. Encore une fois, le nombre d'inconnues statiques de liaison dépend de la nature des modèles adoptés pour les liaisons.

Soit à résoudre le système de E_s équations obtenues à I_s inconnues dénombrées. Ce système est un système linéaire avec second membre, qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :



(1) : Poids - Couple ou effort, moteur ou résistant - actions mécaniques externes ou internes dues à des éléments déformables ...

(2) : cf. cours de dynamique, égales à 0 en statique.

On constate l'égalité suivante :

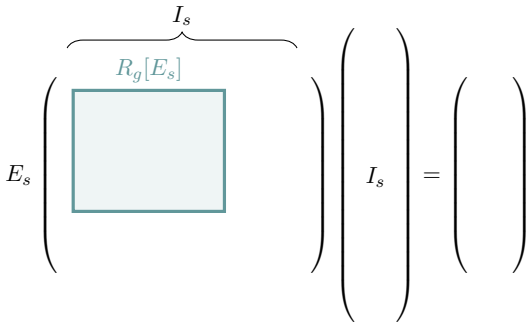
$$I_c - E_c = E_s - I_s$$

5.3 Degré d'hyperstatisme h

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté $Rg[E_S]$ (nombre d'équations significatives).

- Un mécanisme est dit isostatique si, en l'absence d'actions mécaniques extérieures, toutes les inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons sont nulles.
- Un mécanisme est dit hyperstatique si, en l'absence d'actions mécaniques extérieures, il existe des inconnues non nulles d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons, dans les faits indéterminées.

Supposons connu le rang du système et les équations disposées ainsi :



Mathématiquement, on définit le degré d'hyperstatisme h par $h = I_s - rg[E_s]$. Le nombre définissant le degré d'hyperstatisme est un entier naturel, $h \geqslant 0$.

Mécaniquement, le degré d'hyperstatisme h représente le nombre d'inconnues ne pouvant pas être déterminées à l'aide de la statique ou de la dynamique.

5.4 Mobilité d'un mécanisme m

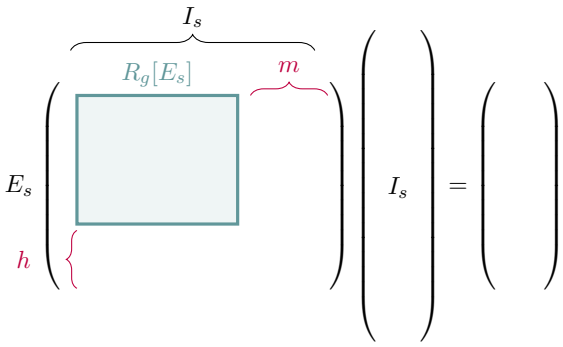
Soit le nombre m défini (mathématiquement, pour la statique) par :

$$m = E_s - rg[E_s]$$

Ce nombre est la mobilité du mécanisme. C'est un entier positif ou nul. Il exprime le nombre d'équations ne servant pas à la résolution (le plus souvent de la forme $0 = 0$ pour l'équation homogène associée).

Mécaniquement, en statique et cinématique, la mobilité est définie **de la même façon**.

Finalement, la forme du système d'équation peut être présentée de la manière suivante :



On a donc les deux relations :

$$m = E_s - rg[E_s] \quad \text{et} \quad h = I_s - rg[E_s]$$

On en tire alors :

$$\boxed{h = m - E_s + I_s}$$

Ce résultat est bien identique à celui trouvé par l'approche cinématique ($E_s - I_s = I_c - E_c$).

Remarque

- $h = 0$: le mécanisme est dit **isostatique**.
- $h = n > 0$: il est dit **hyperstatique d'ordre** n.

6 Rendre le mécanisme isostatique ou non ?

Concevoir un système volontairement hyperstatique est courant, notamment dans le cas de systèmes dans lesquels les efforts mis en jeux sont importants, ou pour les systèmes qu'on souhaite très rigides (pour limiter les déformations par exemple, ou pour la mécanique de précision).

Dans le cas où un mécanisme est hyperstatique, 2 solutions sont à envisager :

- composer avec cet hyperstatisme pour quand même garantir le bon fonctionnement du mécanisme ;
- rendre le modèle du mécanisme isostatique en modifiant sa structure (choix de liaisons différentes...).

6.1 Construire hyperstatique

Les efforts engendrés dans les liaisons sont proportionnels (en première approche) aux défauts nuisibles (d'après les lois régissant la mécanique des solides déformables – RdM) donc, si l'on désire conserver l'assemblage hyperstatique, ces défauts doivent être limités par des spécifications géométriques dont les intervalles de tolérance sont faibles. Le coût de fabrication s'en trouve généralement fortement accru.

6.1.1 Inconnues statiques du type résultante

Il est possible d'annuler les effets néfastes d'une inconnue statique de liaison du type résultante, en spécifiant précisément une distance entre 2 axes parallèles (entraxe) ou entre 2 points. En bureau d'étude, on utilise des outils de spécification géométrique (cotation GPS – Geometrical Product Specification) pour définir de manière univoque les critères dimensionnels, les spécifications géométriques (parallélisme, cylindricité ...) à respecter ainsi que les tolérances (précision souhaitée). Par exemple, un entraxe spécifié précisément permet de garantir le bon fonctionnement d'un mécanisme présentant un degré d'hyperstatisme de 1 sur ce même axe (exemple d'une liaison pivot réalisée avec 2 rotules en parallèle).

6.1.2 Inconnues statiques du type moment

Pour ce qui est des inconnues statiques de liaison du type moment, il suffit généralement de spécifier précisément un parallélisme entre 2 axes (qui dans l'espace implique 2 angles). Ainsi, avec un tolérancement géométrique de ce type, il est possible d'annuler les problèmes liés à 2 moments indéterminés du fait de l'hyperstatisme (cf. bras Maxpid).

6.1.3 Contraintes géométriques et dimensionnelles

Contraintes	Caractéristique(s)	Diminution de h	Composante(s) supprimée(s)
Entraxe	1 distance	1	1 résultante
Parallélisme	2 angles	2	2 moments
Coaxialité	2 distances et 2 angles	4	2 résultantes et 2 moments

6.2 Rendre l'assemblage isostatique

Pour rendre le modèle du mécanisme isostatique, il suffit d'annuler l'une des inconnues de la ou des familles d'inconnues hyperstatiques (cf. approche statique). Ceci s'effectue en ajoutant un ou plusieurs degrés de liberté à l'une ou l'autre des liaisons de la chaine fermée.

7 Ce qu'il faut (au minimum) retenir

7.1 Récapitulatif

	Appr. cinématique	Appr. statique
Nombre de pièces d'un mécanisme	N_P	N_P
Nombre de liaisons	N_L	N_L
Nombre cyclomatique	$\gamma = N_L - N_P + 1$	
Nombre d'équations	$E_c = 6\,\gamma$	$E_s = 6\,(N_P - 1)$
Nombre d'inconnues de liaisons	I_c	I_s
Degré de mobilité d'un mécanisme	$m = m_u + m_i$	$m = m_u + m_i$
Degré d'hyperstatisme	$\boxed{h = m - I_c + E_c}$	$\boxed{h = m - E_s + I_s}$

Remarque

Pour retenir la formule globale, trouvez-vous un moyen mnémotechnique. Par exemple, Mickey ($h = m - I_c + E_c$) et Messi ($h = m - E_s + I_s$) !!!

Remarque

Le paramètre $m - h$ est parfois appelé indice de mobilité.

7.2 Quelle approche privilégier ?

Pour une recherche du **degré de mobilité** et du **degré d'hyperstatisme**, l'approche **cinématique** est souvent plus commode et rapide, et ce pour deux raisons. Les grandeurs manipulées sont observables et mesurables, et le nombre d'équations à manipuler est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique (statique).

Pour la recherche de l'isostatisme ou des conditions géométrique et dimensionnelle associées à l'hyperstatisme, une approche statique est à privilégier, ou alors simplement une logique pour l'assemblage (montage) des solides avec des défauts exagérés.