

Table des matières

1	Philosophies et approches	3
1.1	Modélisation causale	3
1.2	Modélisation acausale	4
2	Une représentation causale : le Graphe Informationnel Causal	5
2.1	Processeur	6
2.1.1	L'effet dépend du temps : intégrateur	6
2.1.2	L'effet ne dépend pas du temps : dissipateur	7
2.1.3	Il y a couplage : processeur quadripôle	7
2.2	Méthode	8
2.3	Processeurs usuels	9
3	Exemple du moteur à courant continu	12
3.1	Constitution	12
3.1.1	L'inducteur	12
3.1.2	L'induit	12
3.1.3	Le dispositif collecteur/balais	12
3.2	Formulation du système d'équations	13
3.2.1	Forces électromotrice et contre-électromotrice	13
3.2.2	Équation électrique	13
3.2.3	Équation mécanique	13
3.2.4	Phénomènes non linéaires	13
3.3	Réalisation du schéma-bloc	14
3.4	Réalisation du GIC	14

1 Philosophies et approches

Au premier abord, la modélisation acausale peut être considérée comme une approche orientée phénomènes physiques et composants d'ingénierie, tandis que la modélisation causale est orientée vers la représentation de systèmes d'équations mathématiques.

Dans une représentation causale, on fait donc apparaître les mathématiques derrière la modélisation, les intégrales, les gains...

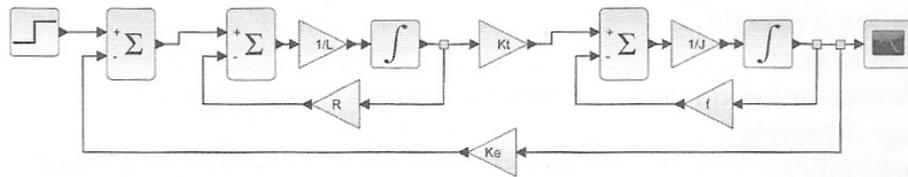


FIGURE 1 – Modèle causal d'une machine à courant continu utilisée en moteur

La représentation sous forme de **schéma-bloc**, dont les blocs contiennent des fonctions de transferts utilisant le formalisme de Laplace (des « maths »), est donc une forme de **représentation causale**. Les objets disparaissent au profit des équations mathématiques qui permettent de les modéliser.

À l'inverse, dans une représentation acausale, **les équations mathématiques disparaissent au profit des objets, des composants d'ingénierie**. Le modèle de connaissance du composant, les équations qui permettent de décrire son comportement, ne sont pas indispensables à la modélisation du système. Le schéma acausal est un schéma structurel qui montre l'architecture matérielle du système.

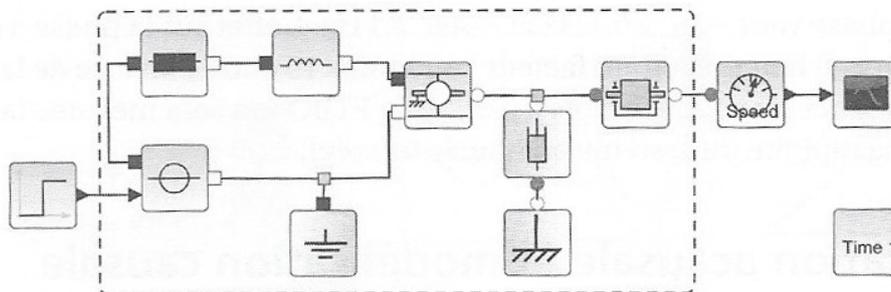


FIGURE 2 – Modèle acausal d'une machine à courant continu

1.1 Modélisation causale

La modélisation causale permet de modéliser des **phénomènes linéaires**. Certaines non linéarités peuvent être prises en compte par les logiciels, cependant, on procédera plus souvent à une **linéarisation de ces phénomènes autour d'un point de fonctionnement**.

La modélisation repose sur le calcul symbolique (transformée de Laplace, algèbre des schémas-blocs). La résolution se base sur une transformation des équations dans un domaine symbolique. On peut ensuite utiliser une transformation inverse pour revenir dans le domaine temporel.

Des conditions initiales nulles sont imposées : pas de cause → pas d'effet.

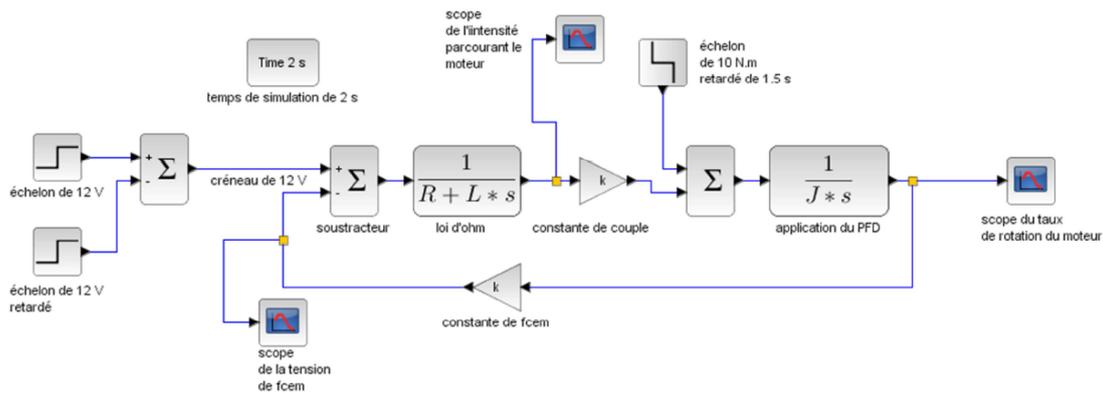


FIGURE 3 – Variante du modèle causal d'une machine à courant continu

Inconvénients	Avantages
Pas de réversibilité du modèle (sens imposé des flèches)	La connaissance des symboles technologiques n'est pas nécessaire
Gestion contraignante des non-linéarités	Recherche de solutions analytiques simplifiée
L'architecture du système n'est pas forcément respectée	Analyses fréquentielles simplifiées dans le domaine symbolique (Bode, Black, Nyquist)
Le schéma impose une démarche de résolution au solveur	

1.2 Modélisation acausale

La modélisation acausale permet de modéliser des systèmes réels. Le modèle associé au composant peut être expérimental, plutôt que théorique, la modélisation sera donc plus précise, oet on pourra prévoir avec plus de fidélité le comportement du système étudié. Notamment, les non-linéarités seront mieux prises en compte.

La résolution des équations de comportement du système est obtenue à l'aide de solveurs qui optimisent les calculs. Cette modélisation implique une résolution uniquement numérique.

Enfin, le modèle acausal est réversible, les liens entre les blocs ne sont pas orientés. C'est pourquoi un alternateur pourra aussi bien fonctionner en moteur qu'en générateur électrique.

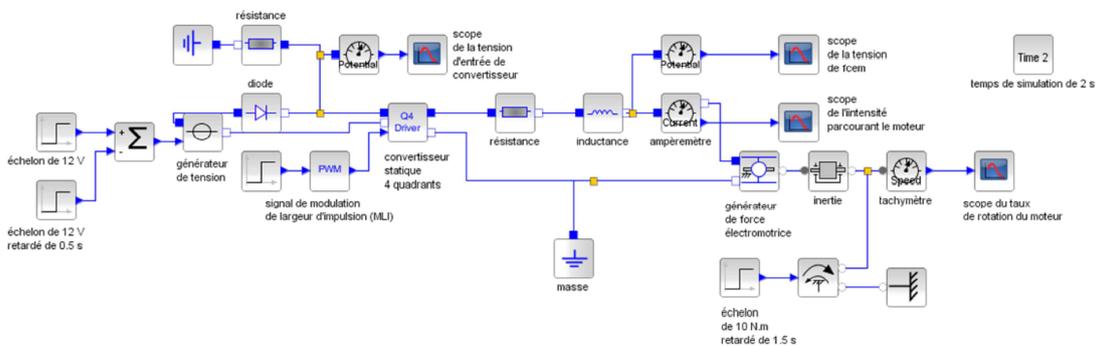


FIGURE 4 – Variante du modèle acausal d'une machine à courant continu (avec réversibilité)

Inconvénients	Avantages
Il faut maîtriser les paramètres influents sur le comportement du constituant	Le modèle théorique des composants n'est pas nécessaire
La connaissance des symboles technologiques est nécessaire	Le modèle respecte l'architecture matérielle du système
Cette approche n'est pas adaptée à l'analyse fréquentielle	Les connecteurs utilisés sont adaptés à des grandeurs physiques, la polarité est respectée
Le solveur peut-être perçu comme un boîte noire, qui peut conduire ou non à la résolution du problème étudié	Il est possible de faire le lien avec l'ingénierie du système (SysML)

2 Une représentation causale : le Graphe Informationnel Causal

Lorsqu'on utilise un système, on souhaite, à partir d'une consigne, obtenir un certain effet. Le dispositif de commande a pour objectif d'imposer le comportement du processus par inversion de causalité, quelle que soit la nature du dispositif. Ce dispositif de commande ne peut donc être étudié sans avoir, au préalable déterminé les caractéristiques du processus.

Le **Graphe Information Causal (GIC)** est une proposition de symbolisme et de méthodologie permettant de transcrire un processus. Il amène une représentation systématique du principe de causalité naturelle.



Définition *Processus*

Un processus est un assemblage d'objets fonctionnant selon la règle de causalité.

Dans un système, il existe des grandeurs influentes et d'autres influencées, reliées entre elles par des relations de transformation à l'intérieur d'un processeur. **La sortie ne dépend que des valeurs présentes et passées de l'entrée.**

Ces relations sont explicitées par des équation différentielles, linéaires ou non, d'un ordre de dérivation naturellement plus élevé sur les sorties que sur les entrées.

L'état d'un système, ou du processus, est alors défini par l'état de l'ensemble des objets qui le composent, et donc par les paramètres associés à ces objets. Ces variables sont des vitesses, des intensités, des tensions... L'état du système peut donc être représenté par son état énergétique, i.e. par ses énergies potentielle (mécanique, électrostatique, élastique...) et son énergie cinétique.

On pourra catégoriser les variables comme grandeurs de **flux** (ou grandeurs cinétiques) si elles sont associées à une énergie cinétique (vitesse, rotation, intensité...) et comme grandeurs **d'effort** (ou **potentielles**) si elles sont associées à des énergies potentielles (couple, force, tension...)

2.1 Processeur

Le processeur est le graphe élémentaire attaché à un objet physique établissant une relation de transformation notée R entre une ou plusieurs variables constituant le vecteur d'entrée e et une ou plusieurs variables constituant le vecteur sortie y .

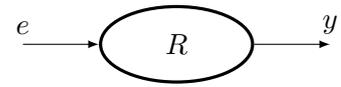


FIGURE 5 – Processeur

Exemple:

Une tension U alimente un vérin qui se déplace à une vitesse \dot{x} , dans ce cas, R sera constante. U est la cause, \dot{x} est l'effet, qui pourra être la cause de la variation d'une autre variable (voir FIGURE 6).

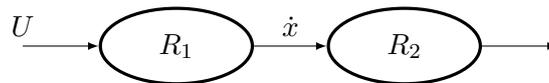


FIGURE 6 – Exemple simple

Dans la réalité, « naturellement », les relations de transformation seront de plusieurs sortes, décrites dans les 3 paragraphes suivants.

2.1.1 L'effet dépend du temps : intégrateur

La propriété d'un objet intégrateur pur est d'accumuler l'énergie cinétique ou potentielle qui lui est fournie. Il établit une dualité entre la grandeur d'entrée et la grandeur sortie. Si la variable d'entrée est une grandeur de **flux** (resp. d'effort), la variable de sortie est une grandeur d'**effort** (resp. de flux). C'est le principe des vases communicants.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e(t)dt + s(t_0)$$



FIGURE 7 – Intégrateur

Exemples : condensateur (voir ci-dessous) et bobine en électricité, masse et ressort en mécanique.

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \iff u(t) = \int_0^t i(t)dt \iff U(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$$



Attention Causalité

Les relations écrites ci-dessus sont bien équivalentes d'un point de vue mathématique. Cependant, il est impossible de déterminer instantanément $i(t)$ à partir de $u(t)$ du fait de la non causalité de la dérivation. Cette relation n'a donc bien qu'un **seul sens** (voir FIGURE 8) !

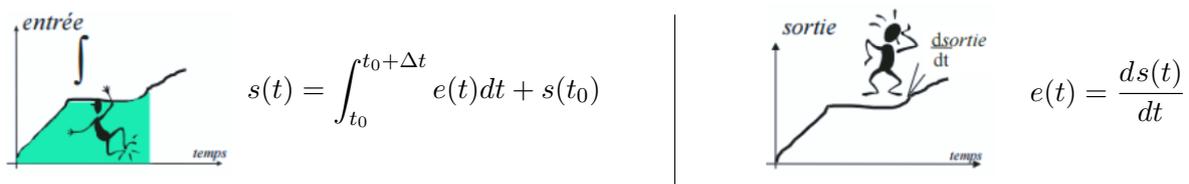


FIGURE 8 – Illustration de la non causalité de la dérivation

**Définition** *Dipôle causal*

Pour ce type de processeur, la relation est orientée, elle est qualifiée de causale, ou d'élastique. On parle de **dipôle causal**.

2.1.2 L'effet ne dépend pas du temps : dissipateur

La propriété d'un objet dissipateur est de transformer et/ou de dissiper sous forme de chaleur l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle qui lui est fournie.

$$s(t) = f(e(t))$$

FIGURE 9 – Dissipateur

Exemples : résistance électrique (voir ci-dessous), frottement visqueux...

$$u(t) = Ri(t) \iff U(p) = RI(p) \iff I(p) = \frac{1}{R}U(p)$$

**Remarque**

On a bien $U = k_1 I$ et $I = k_2 U$, avec $k_1 = \text{cste}$ et $k_2 = \text{cste}$. C'est la caractéristique d'un dissipateur.

2.1.3 Il y a couplage : processeur quadripôle

Le processeur quadripôle est l'élément idéal de couplage. La propriété d'un tel élément réside dans sa neutralité énergétique, l'énergie est tous simplement transférée d'une branche à une autre.

$$y_1 = m e_1 \quad y_2 = m e_2 \quad \text{et} \quad E = e_1 y_2 = e_2 y_1 = \text{cste}$$

On distinguera les **modulateurs**, pour lesquels l'énergie en entrée est de même type de l'énergie en sortie (ex : transformateur électrique, réducteur mécanique...), et les **gyrateurs**, pour lesquels l'énergie en entrée est différente de l'énergie en sortie (ce sont des convertisseurs idéaux) (ex : machine à courant continu idéale, génératrice idéale...).

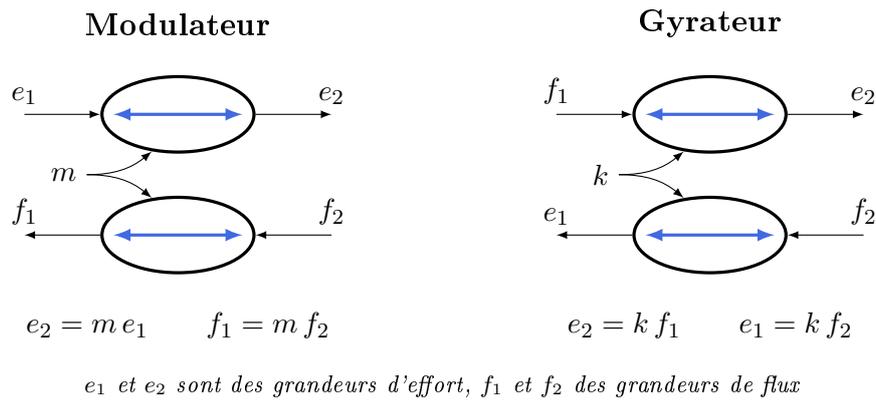


FIGURE 10 – Modulateur et gyrateur (cas général)

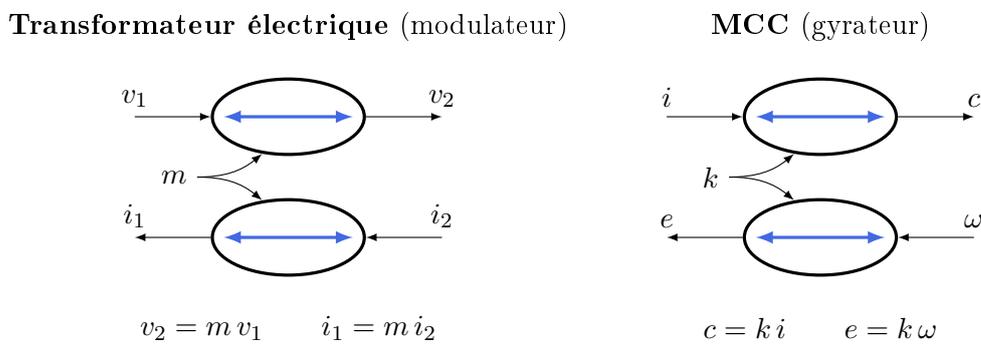


FIGURE 11 – Modulateur et gyrateur (cas particuliers)



Remarque

Les couplages ne sont pas pris en compte dans un schéma bloc, puisqu'on ne s'intéresse qu'à des variables uniques, les unes après les autres. On utilisera soit $i_2 = m i_1$ soit $v_2 = m v_1$.

2.2 Méthode

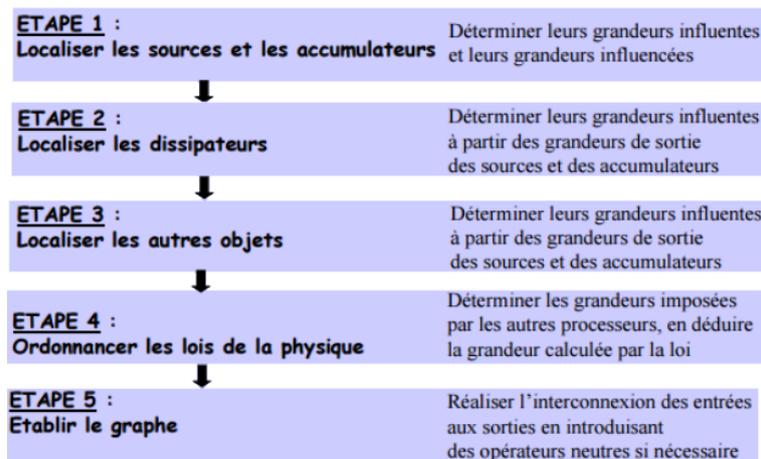


FIGURE 12 – Méthode d'établissement d'un modèle GIC

2.3 Processeurs usuels

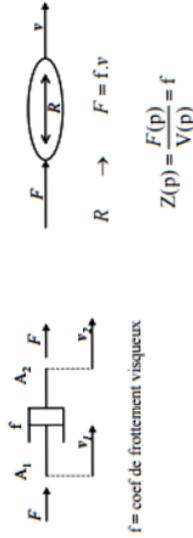
4. Les processeurs mécaniques

4.1. Elément dissipatif

Les causes de pertes ou de dégradation de l'énergie mécanique résident dans les diverses formes du frottement. Seul le frottement visqueux permet de définir un élément dissipatif linéaire (effort proportionnel à la vitesse).

4.1.1. Translation

Le frottement visqueux est employé dans les amortisseurs constitués d'un piston se déplaçant dans un cylindre. L'élément de dissipation par frottement visqueux ou amortisseur est habituellement représenté par le piston associé au cylindre ; on l'appelle parfois **dashpot**.

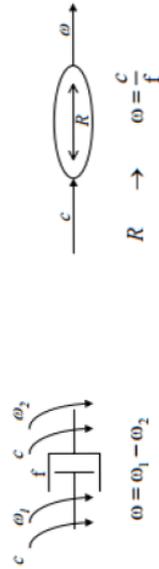


Suite à l'application de la force \vec{F} à l'une des extrémités A_1 d'un amortisseur, celui-ci transmet la force en sa deuxième extrémité A_2 . A_1 et A_2 prennent alors les vitesses respectives v_1 et v_2 telles que l'écart $v = v_1 - v_2 = \frac{F}{f}$ où v , v_1 , v_2 , F représentent les valeurs algébriques des vecteurs du même nom. L'amortisseur devient alors le siège d'une dissipation de puissance instantanée $p = F \cdot v$

4.1.2. Rotation

Les frottements visqueux de rotation se manifestent par exemple sur l'arbre d'un palier lubrifié, dans les coupleurs hydrauliques...

Dans le coupleur hydraulique, la transmission du couple c , proportionnel à l'écart des vitesses angulaires, est qualifiée d'asynchrone. $c = f(\omega_1 - \omega_2) = f \cdot \omega$ où f est le coefficient de frottement visqueux angulaire.



3. Les processeurs électriques

Variables :

- i : courant électrique (intensité en ampères A),
 - v : tension électrique ou différence de potentiel (tension en volts V)
- Un dipôle (circuit électrique accessible par deux bornes A et B) traversé par un courant i (sens positif choisi entrant en A) et aux bornes duquel on observe une différence de potentiel $v_A - v_B$ ou tension v reçoit la puissance instantanée : $p = v \cdot i$

3.1. Elément dissipatif

Résistance électrique R.

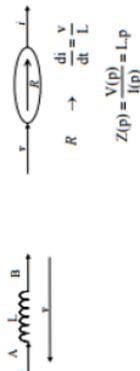


La puissance instantanée reçue p est dissipée, $p = R \cdot I^2$ (effet joule, échauffement).

3.2. Elément cinétique

Bobine, inductance L.

Une bobine idéale (sans pertes), d'inductance L (H), établit une relation causale entre la tension v appliquée entre ses bornes et le courant i qui s'y développe (loi de Faraday).



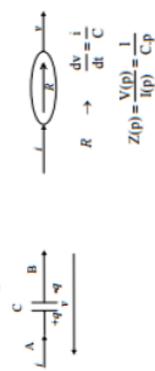
Energie emmagasinée : $E_c = \frac{1}{2} L \cdot I^2$

3.3. Elément potentiel

Condensateur, capacité C.

Un condensateur idéal (sans perte), de capacité C (F) établit une relation causale entre le courant i qui l'alimente et la tension v (ou la charge $q = C \cdot v$) qui prend naissance entre ses bornes.

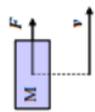
Energie emmagasinée : $E_p = \frac{1}{2} C \cdot v^2$



4.2. Elément cinétique

4.2.1. translation

Soit un solide indéformable de masse M , sous l'action de la force \vec{F} il acquiert la vitesse v calculable par la relation fondamentale de la dynamique (**relation causale**).



$$R \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}$$

$$Z(p) = \frac{F(p)}{V(p)} = M.p$$

La masse M est l'analogie mécanique de l'inductance L . L'énergie cinétique des pièces en translation s'exprime en fonction de la variable d'état v :

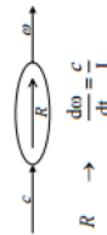
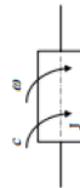
$$E_c = \frac{1}{2} M.v^2.$$

4.2.2. Rotation

Les volant, les rotors représentent les éléments cinétiques de rotation. Sous l'action d'un couple c (N.m), ils prennent une accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{J}$ ou J (kg/m²) est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Le moment d'inertie est l'analogie mécanique de l'inductance. L'énergie cinétique des pièces en rotation s'exprime en fonction de la variable d'état ω :

$$E_c = \frac{1}{2} J.\omega^2$$



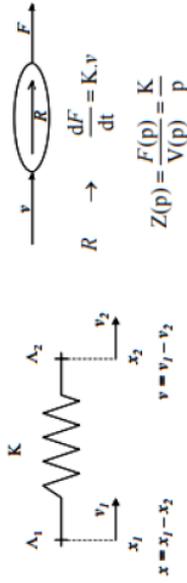
$$R \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{J}$$

$$Z(p) = \frac{C(p)}{\Omega(p)} = J.p$$

4.3. Elément potentiel

4.3.1. Translation

Soit un ressort de raideur K (N/m) dont la masse est négligée. Le ressort en tant qu'organe de couplage mécanique, transmet une \vec{F} de A_1 à A_2 . Par principe des actions mutuelles, il exerce en A_1 sur le système auquel il est ancré une force dite de rappel égale à $-\vec{F}$.



Le ressort est l'analogie mécanique du condensateur. L'énergie potentielle emmagasinée à l'instant t s'écrit en fonction de la variable d'état x :

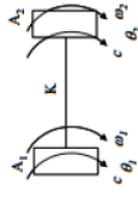
$$E_p = \frac{1}{2} K.x^2$$

4.3.2. Rotation

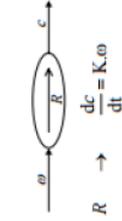
Un arbre de transmission est assimilable à un ressort spirale de constante de torsion K (N.m/rad).

A l'instant t , on note :

- > A_1 et A_2 sections extrêmes de l'arbre.
 - > ω_1 et θ_1 : vitesse et position angulaire de la section A_1 .
 - > ω_2 et θ_2 : vitesse et position angulaire de la section A_2 .
- L'arbre de transmission, en tant qu'organe de couplage mécanique, transmet un couple c de l'extrémité A_1 vers l'extrémité A_2 .



ω_1, θ_1 : vitesse et position angulaire de la section A_1
 ω_2, θ_2 : vitesse et position angulaire de la section A_2



$$R \rightarrow \frac{dc}{dt} = K.\omega$$

$$Z(p) = \frac{c(p)}{\Omega(p)} = \frac{K}{p}$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad \theta = \theta_1 - \theta_2$$

Les éléments élastiques en rotation sont les analogues mécaniques du condensateur.

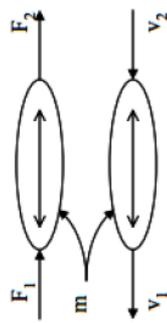
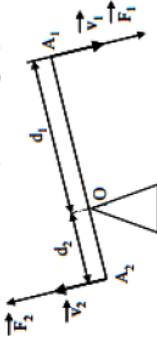
L'énergie potentielle emmagasinée s'écrit en fonction de la variable d'état θ :

$$E_p = \frac{1}{2} K.\theta^2$$

4.4. Elément modulateur

4.4.1. Translation

Le bras de levier permet d'accroître l'effort (sans se fatiguer). C'est un modulateur.



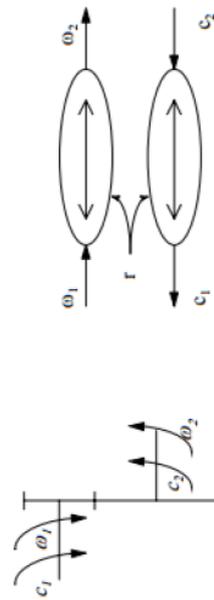
$$F_2 = \frac{d_1}{d_2} F_1 = m \cdot F_1 \quad v_1 = \frac{d_1}{d_2} v_2 = m \cdot v_2$$

Le bras de levier est l'analogie mécanique du transformateur électrique.

4.4.2. Rotation

La multiplication (ou réduction) du couple et corrélativement la réduction (ou multiplication) de la vitesse s'effectue principalement par l'emploi de :

- > réducteurs à engrenages,
- > variateurs à poulies et courroies...



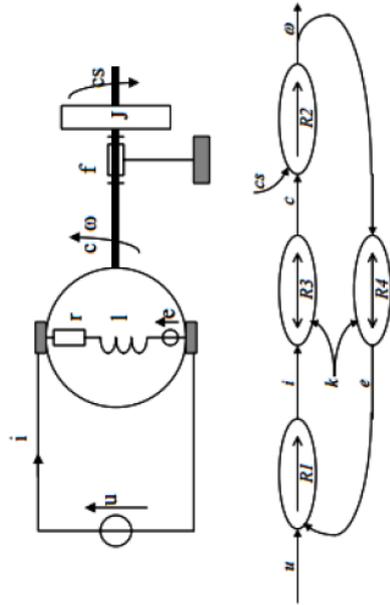
$$c_2 = r \cdot c_1$$

$$\omega_1 = r \cdot \omega_2$$

$$c_1 \cdot \omega_1 = c_2 \cdot \omega_2$$

4.5. Elément gyrateur

Le moteur à courant continu



$$R1 \rightarrow u = r \cdot i + l \frac{di}{dt} + e$$

$$R2 \rightarrow c = f \cdot \omega + J \frac{d\omega}{dt} + cs$$

$$R3 \rightarrow c = k \cdot i$$

$$R4 \rightarrow e = k \cdot \omega$$

Equation de la partie électrique

Equation de la partie mécanique

Equations de couplage par gyration

3 Exemple du moteur à courant continu

3.1 Constitution

La machine à courant continu est constituée de trois parties principales : l'inducteur, l'induit et le dispositif collecteur/balais (voir FIGURE 13).

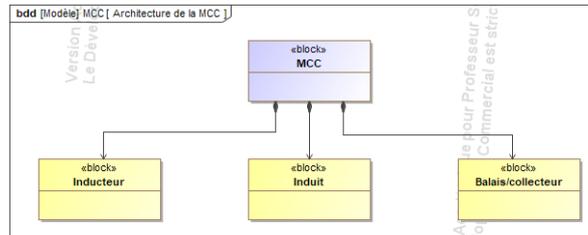


FIGURE 13 – bdd d'un moteur à courant continu

3.1.1 L'inducteur

C'est un aimant ou un électroaimant, (un bobinage parcouru par un courant continu i permettant de créer un champ magnétique permanent. Il est fixé sur la partie fixe de la machine.

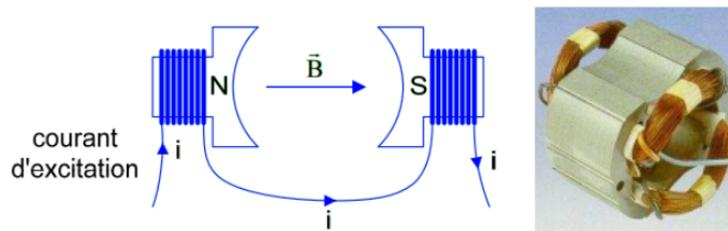


FIGURE 14 – Inducteur d'un moteur à courant continu

3.1.2 L'induit

L'induit est constitué d'un bobinage parcouru par un courant continu I (courant induit).

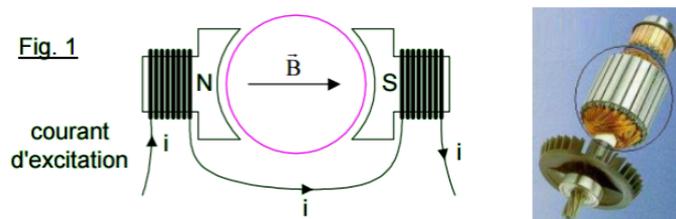


FIGURE 15 – Induit d'un moteur à courant continu

3.1.3 Le dispositif collecteur/balais

Le collecteur est un ensemble de lames de cuivre où sont reliées les extrémités du bobinage de l'induit. Les balais (ou charbons) sont situés sur le stator et frottent sur le collecteur en rotation, ce qui permet de faire circuler un courant dans l'induit.

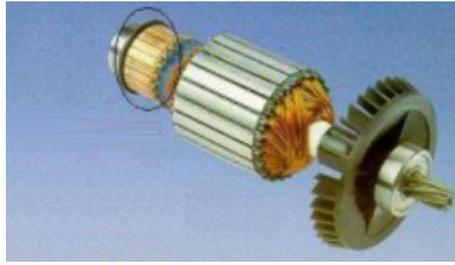


FIGURE 16 – Dispositif collecteur/balai d'un moteur à courant continu

3.2 Formulation du système d'équations

3.2.1 Forces électromotrice et contre-électromotrice

Le principe physique en œuvre est le phénomène d'induction électromagnétique. La loi de Lenz-Faraday et l'étude des forces de Laplace permettent de définir les 2 équations de couplage électromagnétique :

$$e(t) = k_e \omega_m(t) \quad c_m(t) = k_c i(t)$$

3.2.2 Équation électrique

Les fils qui constituent la bobine d'une part ont une résistance électrique, d'autre part induisent une inductance. On modélisera donc notre circuit par le schéma suivant :

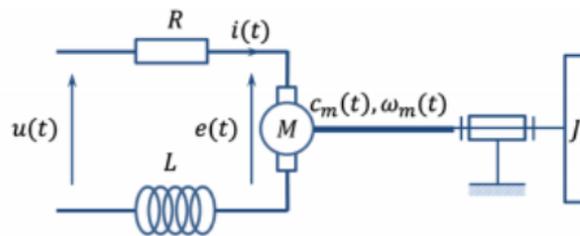


FIGURE 17 – Modèle retenu pour déterminer l'équation électrique

La loi des mailles nous donne alors : $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$

3.2.3 Équation mécanique

On note J l'inertie de l'arbre moteur. On négligera les effets de la pesanteur. On note c_r le couple résistant dû aux frottements secs et $f_v \omega_m(t)$ le couple résistant dû aux frottements visqueux.

Le TMD nous donne alors : $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - c_r - f_v \omega_m(t)$

3.2.4 Phénomènes non linéaires

On pourrait par exemple avoir un phénomène de saturation du courant : $-i_s \leq i(t) \leq i_s$

3.3 Réalisation du schéma-bloc

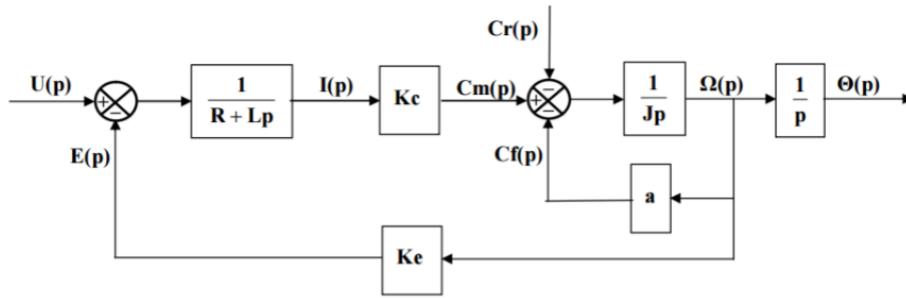


FIGURE 18 – Schéma-blocs de la MCC

3.4 Réalisation du GIC

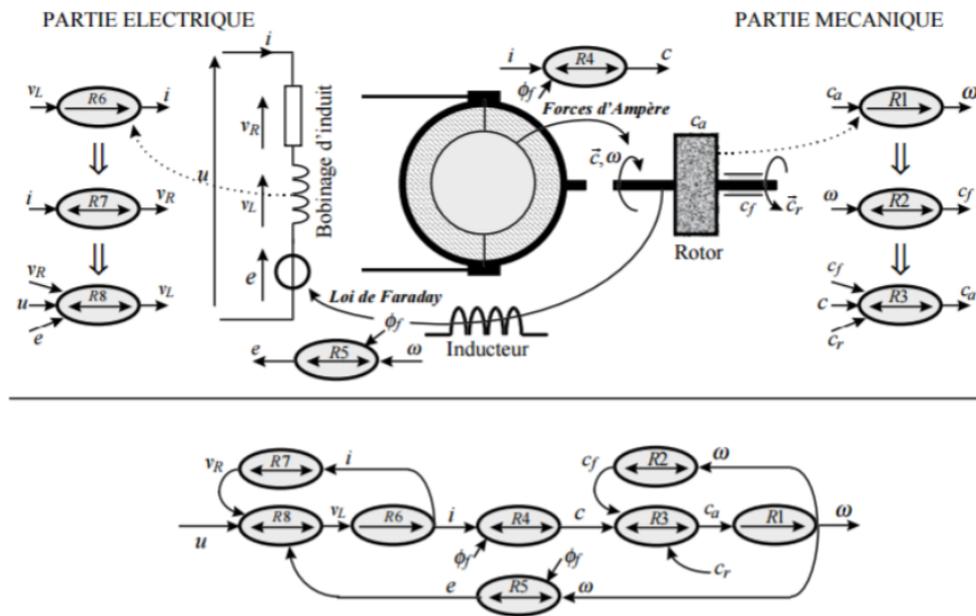


FIGURE 19 – Établissement du modèle GIC de la MCC

Références

- [1] A. CAIGNOT, V. CRESPEL, M. DÉRUMAUX, C. GARREAU, B. MARTIN, A. REDONDO et S. ROUX : *Sciences Industrielles de l'Ingénieur - MP/MP*, PSI/PSI*, PT/PT**. Vuibert, 2014.
- [2] H. PENVERN : Cours de sciences de l'ingénieur, 2016. PT - Lycée Parc de Vilgénis - Massy.
- [3] D. GELIN : gelin.denis.free.fr.
- [4] B. FRANÇOIS : Cours d'électricité, 2016. L2EP - Université de Lille.