



PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

TD

CPGE

Compétences visées: A2-01, B2-16, B2-17, B2-18, C2-15, C2-16

v0.1

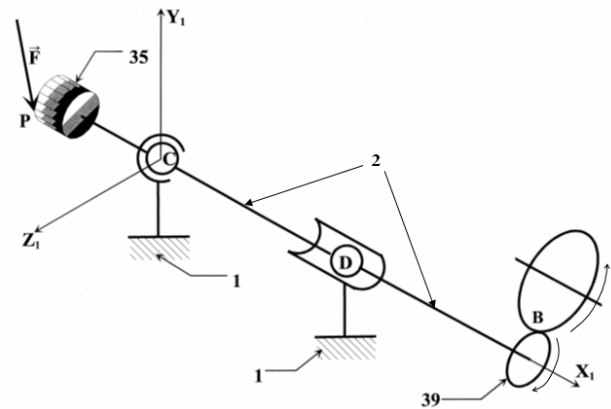
Lycée La Fayette - 21 Bd Robert Schuman - 63000 Clermont-Ferrand - Académie de Clermont-Ferrand

EXERCICES D'APPLICATION

1 Guidage en rotation

Le support de cette étude est le guidage en rotation de la broche d'une machine outil. Une modélisation de ce guidage est proposée sur la figure ci-contre.

L'outil **35**, fixé à la broche **2**, est entraîné en rotation par le pignon **39**. Une roue (non repérée sur la figure) engrène au point **B** avec le pignon **39** solidaire de la pièce **2**. La broche tournant à vitesse constante, l'inertie de l'ensemble peut être négligé, le système est donc considéré comme étant en équilibre.



Hypothèses et données

- l'effort de coupe est modélisé par le glisseur : $\{\mathcal{T}_{p \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_a \cdot \vec{x}_1 - F_c \cdot \vec{y}_1 - F_l \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\vec{CP} = -L \cdot \vec{x}_1 + R_{35} \cdot \vec{z}_1$, $\vec{CD} = L_2 \cdot \vec{x}_1$, $\vec{CB} = L_3 \cdot \vec{x}_1 + R_{39} \cdot \vec{y}_1$;
- $L_1 = 180 \text{ mm}$, $L_2 = 228 \text{ mm}$, $L_3 = 318 \text{ mm}$, $R_{35} = 32 \text{ mm}$ et $R_{39} = 43 \text{ mm}$;
- les liaisons sont parfaites et le poids des pièces est négligé devant les actions mécaniques transmises ;

Rappel : concernant les engrenages, la direction de l'action mécanique d'une roue motrice 1 sur une roue réceptrice 2 est orientée selon un angle de pression $\alpha = 20^\circ$.

Question 1 Proposer une modélisation des différentes actions mécaniques appliquées à l'arbre **2** sous forme de torseur.

Question 2 Déterminer les expressions littérales de ces différentes actions mécaniques en fonction de F_a , F_c , F_l et des données géométriques.

Question 3 Faire l'application numérique avec $F_a = 120 \text{ N}$, $F_c = 1200 \text{ N}$ et $F_l = 800 \text{ N}$.

2 Porte de garage

La figure représente une porte de garage basculante. La porte **2** est de forme rectangulaire, de hauteur h et de largeur b . Elle est guidée par deux couples de galets couissant dans les rainures horizontales et verticales. Les liaisons entre le bâti **1** et les galets sont modélisées par des sphère-plan normale \vec{x} en A_1 et A_2 et des linéaires annulaires d'axe \vec{x} en B_1 et B_2 à cause du jeu latérale au niveau des guidages.

On note A le milieu de A_1A_2 , B le milieu de B_1B_2 , $\alpha = (\vec{x}_2, \vec{x})$ et \vec{P} le poids de la porte appliqué au centre de masse G tel que $\vec{AG} = a \cdot \vec{x}_2 + \frac{h}{2} \cdot \vec{y}_2$.

L'objectif de l'étude est de déterminer la position d'équilibre de la porte selon que le système d'équilibrage **3** (non représenté) est constitué de deux contrepoids ou de deux ressorts qui exercent en A_1 et A_2 des actions que l'on peut modéliser par des glisseurs ascendants de module F_r :

- CAS 1 : deux contrepoids en A_1 et A_2 (agissant par l'intermédiaire de câbles et de poulie de renvoie) qui exercent des actions mécaniques modélisées par deux glisseurs ascendants de module $F_r = \frac{F}{2}$ (ou F est une constante) ;
- CAS 2 : deux ressorts de raideurs k qui exercent des actions mécaniques modélisées par deux glisseurs ascendants de module $F_r = F_0 - kd(\alpha)$ avec $d(\alpha) = A_0A$.

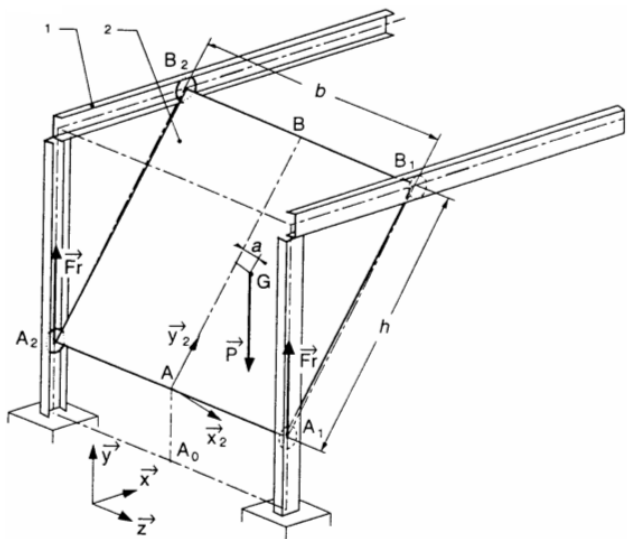
Question 4 Faire le bilan des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur la porte **2** équipée de ses galets (donner le torseur de chaque action).

Question 5 Le système étant symétrique, que dire des action en A_1 et A_2 et en B_1 et B_2 ?

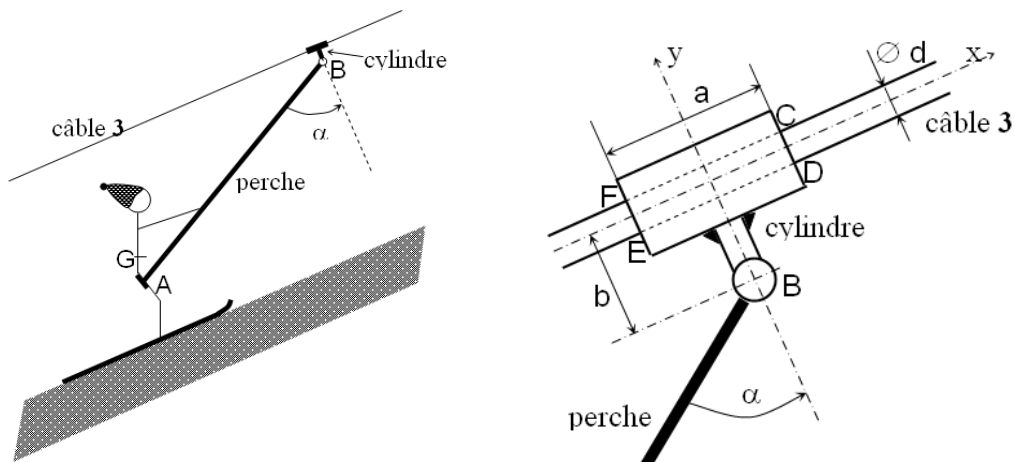
Question 6 Déterminer α en fonction de F_r , P et des dimensions de la porte pour que celle-ci soit en équilibre.

Question 7 Calculer α pour le système d'équilibrage réalisé par les contrepoids (CAS 1).

Question 8 Donner l'équation permettant de déterminer α en fonction de P , F_0 et des dimensions de la porte pour le système d'équilibrage réalisé par les ressorts (CAS 2).



3 Remontée mécanique



Hypothèses et données

- le problème est supposé plan ;
- le frottement entre la piste et les skis est négligé ;
- le coefficient de frottement entre le cylindre **2** et le câble **3** est noté f ;
- la liaison entre la perche et le cylindre **2** est une liaison pivot sans frottement de centre B ;
- l'action du skieur sur la perche est modélisée par un glisseur passant par A (l'action de la main sur la perche est négligée) ;
- le centre de gravité du skieur, de masse m (avec son équipement), est en G .

Le but de l'exercice est de déterminer l'angle minimal entre la perche et la normale au câble pour qu'il n'y ait pas glissement entre la perche et le câble et de montrer que le poids des skieurs n'influe pas sur ces conditions de non glissement.

Question 9 Déterminer graphiquement le point d'application de l'action de la piste sur les skis.

Question 10 Compte-tenu du jeu entre le cylindre **2** et le câble **3**, préciser en quels points se fait le contact entre ces deux solides.

Question 11 Déterminer l'angle α minimal pour qu'il n'y ait pas glissement entre le cylindre **2** et le câble **3**.

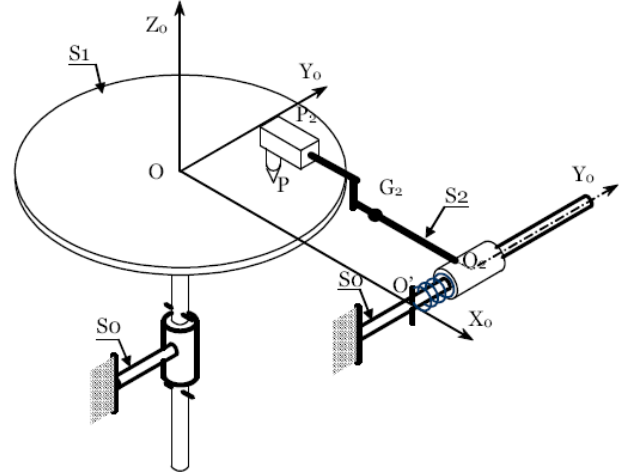
Question 12 Montrer que le poids des skieurs n'influe pas sur le glissement de la perche. Rappeler le nom de ce phénomène.

4 Tribomètre

Avec ce type d'appareil, on cherche à mesurer le coefficient de frottement entre un disque lisse tournant S_1 (platine) et un pion métallique P_2 solidaire du bras S_2 . La mesure du déplacement de S_2 doit permettre l'évaluation du coefficient de frottement recherché.

Hypothèses et paramétrage

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au bâti S_0 où \vec{z}_0 représente la verticale ascendante ;
- La platine S_1 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti S_0 . Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à S_1 . On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $\dot{\alpha} = \omega = \text{cste}$.
- Le bras S_2 de masse m_2 , de centre de masse G_2 est en liaison pivot glissant d'axe (O', \vec{y}_0) avec le bâti S_0 tel que $\overrightarrow{OO'} = d.\vec{x}_0$. Le repère $R_2(O_2, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à S_2 ;



Données

- On note $\overrightarrow{O'O_2} = \lambda.\vec{y}_0$, $\overrightarrow{O_2G_2} = -b.\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{O_2P_2} = -a.\vec{x}_0$ où a, b et d sont des constantes positives ;
- la liaison entre S_1 et S_2 est un contact sphère plan en P où s'appliquent les lois de coulomb relatives au frottement sec. Le coefficient de frottement est noté f ;
- Les autres liaisons sont supposées parfaites ;
- Un ressort de rappel est monté entre le bâti S_0 et le bras S_2 et exerce sur ce dernier une action mécanique modélisée par un glisseur au point O_2 de résultante $\overrightarrow{F_{R \rightarrow S_2}} = -k\lambda.\vec{y}_0$.

Après la mise en rotation de la platine à la vitesse constante ω , le pion P_2 est posé sur celle-ci. Le bras subit alors des oscillations suivant la direction \vec{y}_0 (régime transitoire) puis se stabilise dans une position telle que $\lambda = \lambda^*$.

Question 13 Calculer la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$ en fonction de λ (on notera V la norme de cette vitesse).

Question 14 Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_2 .

On pose $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$ la résultante de l'action mécanique de S_1 sur S_2 avec $\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}$ la composante normale et $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$ la composante tangentielle de cette action mécanique.

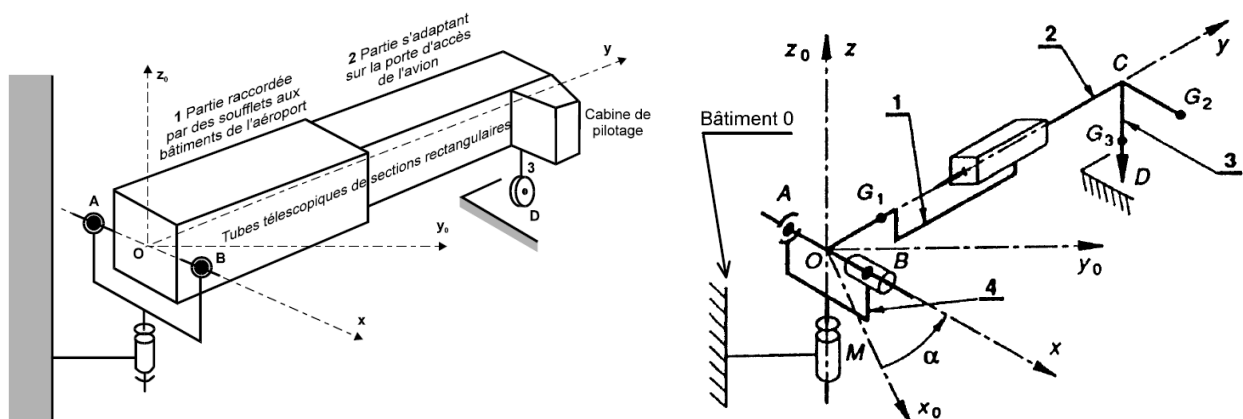
Question 15 Quelle équation scalaire issue des théorèmes généraux de la statique permet de déterminer $\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}$ en fonction de m_2, g, a et b ? En déduire l'expression de $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$.

Question 16 Déterminer la relation entre le coefficient de frottement f et λ en régime stabilisé.

5 Couloir télescopique

Dans la plupart des aéroports modernes, des couloirs télescopiques réunissent les halls d'embarquement à la porte de l'avion : les passagers sont ainsi à l'abri des intempéries.

Le couloir télescopique proposé à l'étude est raccordé aux bâtiments **0** par une articulation comparable à un joint de Cardan, ce qui permet de l'orienter dans toutes les directions. L'extrémité du couloir qui s'adapte à l'avion doit pouvoir se déplacer dans toutes les directions afin de pouvoir atteindre aisément la porte de l'avion. Pour cela, une roue motrice orientable autour d'un axe vertical **3** repose sur le sol horizontal et permet des déplacements horizontaux. La hauteur est réglable en fonction de la position de la porte de l'avion par rapport au sol.



Le système est constitué des solides principaux **0**, **1**, **2** et **4** représentés schématiquement sur les dessins ci-dessus. Dans toute l'étude on ne considérera que le cas où le couloir est parfaitement horizontal. On supposera de plus que le couloir **2** et le support **3** sont en encastrement et forment ainsi la pièce **2**.

Paramétrage

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au sol et au bâtiment de l'aéroport.
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère mobile lié au couloir **1**.
- Ces repères sont tels que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ avec (O, \vec{y}_1) porté par l'axe du couloir **1** et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$.

Données

- solide **1** : poids P_1 , centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = e \cdot \vec{y}_1$;
- solide **2** : composé du couloir **2** et du support **3**, supposé lié l'un à l'autre dans cette étude :
 - ◊ couloir **2** : poids P_2 , centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG_2}$ avec $\overrightarrow{OC} = L \cdot \vec{y}_1$ et $\overrightarrow{CG_2} = c \cdot \vec{x}_1$;
 - ◊ couloir **3** : poids P_3 , centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{DG_3} = d \cdot \vec{z}_0$ avec $\overrightarrow{DC} = h \cdot \vec{z}_0$;
- solide **4** : poids négligeable devant les autres actions mécaniques

Liaisons

- $\mathcal{L}_{4/0}$: pivot d'axe (M, \vec{z}_1) avec $\overrightarrow{OM} = -m \cdot \vec{z}_0$;
- $\mathcal{L}_{1/4}$: deux liaisons en parallèle : rotule de centre A et linéaire annulaire d'axe (B, \vec{x}_1) avec $\overrightarrow{OA} = -a \cdot \vec{x}_1$ et $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{x}_1$;

- $\mathcal{L}_{2/1}$: glissière de direction \vec{y}_1 au point E tel que $\vec{OE} = \lambda \cdot \vec{y}_1$;
- $\mathcal{L}_{2/0}$: ponctuelle de normale (D, \vec{z}_1) .

Afin de dimensionner les liaisons, on cherche à déterminer les actions mécaniques transmises par les liaisons en A (rotule), en B (linéaire annulaire), en D (ponctuelle), en E (glissière) et en M (pivot).

Notation

Les torseurs des actions mécaniques transmissibles de la pièce \mathbf{i} sur la pièce \mathbf{j} au point K dans la base b seront notés sous la forme générale suivante : $\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ijK} & L_{ijK} \\ Y_{ijK} & M_{ijK} \\ Z_{ijK} & N_{ijK} \end{Bmatrix}_b$.

Question 17 Tracer le graphe des liaisons de ce système comprenant les éléments **0**, **1**, **2** et **4**. Ajouter les efforts extérieurs qui agissent sur ce système.

Question 18 Donner les formes générales des torseurs des efforts transmissibles dans les liaisons en A , B , D , E et M (à écrire dans la base b_1 et aux centres des liaisons).

Question 19 Écrire les torseurs des actions mécaniques de pesanteur des pièces **1**, **2** et **3** de ce système.

Question 20 En isolant $\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}\}$, écrire le théorème du moment statique au point O en projection sur la direction \vec{x}_1 et déterminer l'effort du sol sur la roue en D .

Un moteur permet d'orienter le système autour de l'axe (M, \vec{z}_1) en imposant un couple pur de moment $\overline{M}_{M,0 \rightarrow 4} = C_m \cdot \vec{z}_1$ avec $C_m > 0$. On suppose que la roue en D est bloquée et frotte donc sur le sol (coefficient de frottement f entre la roue et le sol). La composante normale de l'effort en D reste identique à celle précédemment calculée (question 20) qu'on notera Z_{02} .

Question 21 À la limite du glissement de la roue sur le sol, donner les composantes de \vec{F}_{02} dans la base b_1 en fonction de Z_{02} et f .

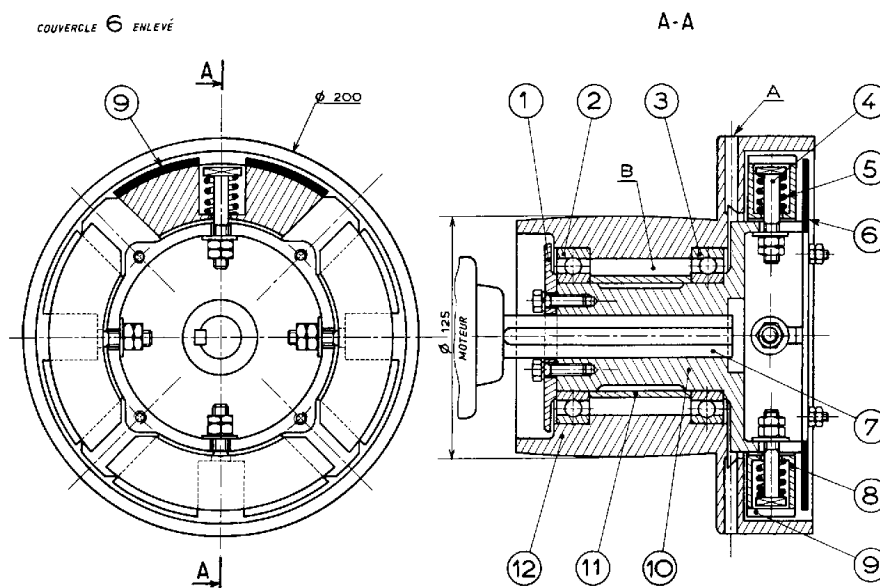
Question 22 En isolant $\{\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4}\}$, écrire le théorème du moment statique au point M en projection sur la direction \vec{z}_1 et déterminer le couple moteur C_m .

Question 23 Écrire les équations d'équilibre du solide **1** au point A .

6 Embrayage centrifuge

Certains moteurs électriques doivent démarrer à vide, parce que leur couple de démarrage est faible. D'autre part, pour gagner du temps et éviter une manœuvre, il y a intérêt à faire assurer automatiquement l'embrayage dès que la vitesse atteint une valeur convenable. La solution mécanique évidente de ce problème consiste à utiliser ici la force d'inertie centrifuge comme effort presseur provoquant l'adhérence. Des masses (ou masselottes), guidées en translation ou en rotation sur la partie motrice, agissent radialement à l'intérieur d'un tambour récepteur.

Le mécanisme ci-dessous représente un type d'embrayage centrifuge simple, mais à dire vrai peu perfectionné. Il est combiné avec la poulie du moteur électrique sur lequel il est monté.

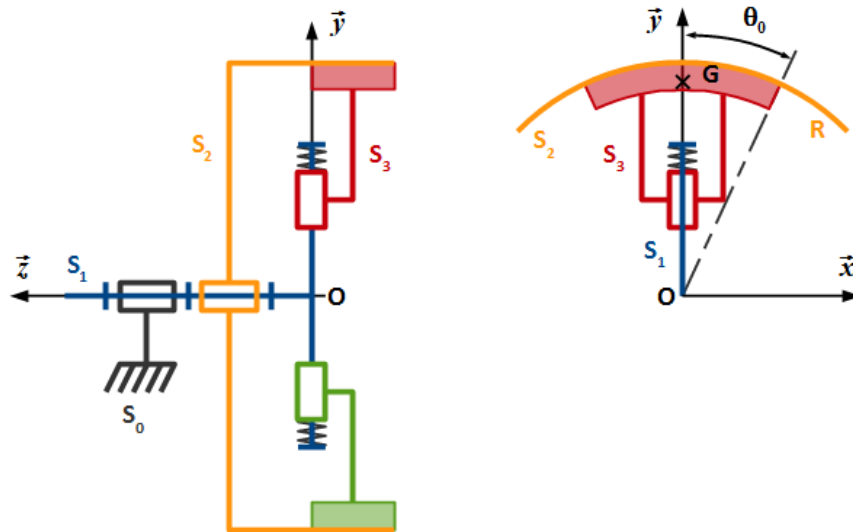


L'arbre **10** claveté sur l'axe du moteur **7** entraîne 4 masselottes **8** portant extérieurement une garniture **9**. Ces masselottes logées dans des alvéoles sont maintenues en place par les boulons **4** et les ressorts **5** de tension réglable. L'intervalle **B** est garni de graisse. Les roulements ne servent qu'au démarrage, ce qui explique qu'il n'y a pas de système d'étanchéité pour le lubrifiant. Celui-ci est projeté, le cas échéant, par les trous **A** plutôt que de se trouver conduit sur les surfaces d'adhérence.

Notations

- p : pression de contact supposée uniforme entre l'arbre de sortie S_2 et les masselottes S_3 ;
- f : coefficient de frottement entre S_2 et S_3 ;
- L : largeur des garnitures ;
- T : tension des ressorts de rappel des masselottes ;
- M : masse d'une masselotte ;
- ω_m : vitesse de rotation de l'arbre moteur S_1 ;
- C_g : couple transmissible par l'embrayage (ou couple de glissement) ;

Schématisation du mécanisme



Hypothèses

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact $\mathbf{S}_2/\mathbf{S}_3$;
- les poids des pièces sont négligés devant les autres actions mécaniques ;
- seul le régime stabilisé sera considéré (les vitesses de rotation sont supposées constantes). Dans ce cas, le principe fondamental de la statique peut s'appliquer à tout sous ensemble du mécanisme à condition de prendre en compte la force d'inertie centrifuge s'exerçant sur chaque masselotte :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow \mathbf{S}_3}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} MR_G \omega_m^2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } R_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} \text{ avec } G \text{ centre de gravité de } \mathbf{S}_3.$$

Question 24 En isolant \mathbf{S}_3 , déterminer une relation liant la pression de contact p et la vitesse de rotation ω_m en régime stabilisé.

Question 25 Déterminer la relation exprimant le couple transmissible par l'embrayage C_g en fonction de la vitesse de rotation ω_m .

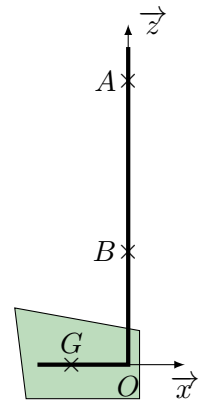
Question 26 Tracer l'allure de cette courbe.

7 Arbre de commande d'un gouvernail

La liaison pivot entre un gouvernail **1** et la coque **0** d'un navire est réalisée à l'aide de deux boîtiers de roulements

- le roulement supérieur est un roulement à rouleaux à rotule immobilisé axialement, réalisant donc une liaison rotule de centre A entre le gouvernail et la coque ;
- le roulement inférieur est un roulement de même type mais non immobilisé axialement, réalisant donc une liaison linéaire annulaire de centre B et d'axe (B, \vec{z}) , entre le gouvernail et la coque.

Le but de l'étude est la détermination des actions mécaniques dans ces deux liaisons, dont la connaissance permettra le dimensionnement des roulements, ainsi que la détermination du couple à exercer par la commande pour vaincre l'effort de l'eau sur le safran.



Hypothèses

- l'action de la pesanteur sur le gouvernail se réduit à une force passant par le point G , centre de gravité, de résultante $\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow 1} = -P \cdot \vec{z}$;
- l'action de l'eau sur le safran est supposée se réduire à une force passant par G , de résultante $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow 1} = F \cdot \vec{y}$;
- l'action de commande sur le gouvernail est modélisée par un torseur couple de moment $\vec{F}_{\text{com} \rightarrow 1} = C \cdot \vec{z}$ au point O ;
- $\vec{OA} = a \cdot \vec{z}$, $\vec{OB} = b \cdot \vec{z}$ et $\vec{OG} = -d \cdot \vec{x}$.

Question 27 Réaliser le schéma cinématique plan en faisant apparaître les deux liaisons décrites précédemment en vous aidant de l'épure ci-dessus.

Question 28 Faites le bilan des actions mécaniques. Exprimez les différents torseurs des actions mécaniques.

Question 29 Exposez et mettez en œuvre la démarche permettant de déterminer les actions mécaniques dans les roulements ainsi que le couple C .

Question 30 Effectuer les applications numériques en prenant $P = 2500 \text{ daN}$, $F = 30\,000 \text{ daN}$, $d = 0,5 \text{ m}$, $a = 2,5 \text{ m}$ et $b = 1 \text{ m}$.

Question 31 Justifiez la différence de dimensions entre les deux roulements.