



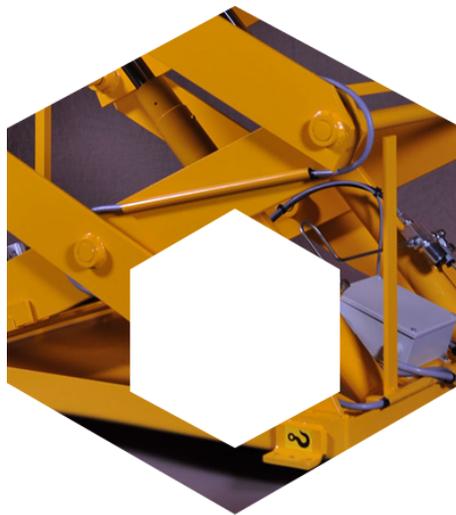
PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

Cours

CPGE

v1.1

Lycée La Fayette - 21 Bd Robert Schuman - 63000 Clermont-Ferrand - Académie de Clermont-Ferrand



Compétences visées:

- A2-01** Isoler un système et justifier l'isolement
- C2-15** Déterminer le calcul complet des inconnues de liaison
- C2-16** Déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre

Table des matières

1	Préambule	3
2	Équilibre des systèmes de solides	3
2.1	Équilibre d'un système matériel	3
2.2	Référentiel galiléen	3
3	Isolement d'un système matériel	4
3.1	Frontière d'isolement	4
3.2	Inventaire des actions mécaniques	4
3.3	Du graphe des liaisons au graphe de structure	5
4	Principe fondamental de la statique (PFS)	6
4.1	Énoncé	6
4.2	Et le principe fondamental de la dynamique alors ?	7
4.3	Résolution d'un problème de statique	7
5	Théorème des actions réciproques	7
6	Quelques isolements particuliers	8
6.1	Système soumis à deux glisseurs	8
6.2	Système soumis à trois glisseurs	9
7	Méthodes de résolution	10
7.1	Méthode systématique	10
7.2	Méthode intuitive – Stratégie de résolution	11

1 Préambule

Après avoir défini et modélisé les actions mécaniques, nous allons aborder dans ce chapitre les méthodes permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons ou celles que devront générer les actionneurs en vue de leur dimensionnement.

2 Équilibre des systèmes de solides

La statique est l'étude des actions mécaniques sur des systèmes matériels en équilibre par rapport à un référentiel galiléen. Il convient donc de définir ces deux notions.

2.1 Équilibre d'un système matériel



Définition *Équilibre d'un système matériel*

Un système matériel Σ est en équilibre par rapport à un référentiel \mathcal{R}_f (référentiel = repère + notion de temps), si chaque point de ce système matériel Σ conserve une position fixe par rapport à ce référentiel \mathcal{R}_f à tout instant.

Dans le cas particulier d'un seul solide S , celui-ci est en équilibre par rapport à ce référentiel \mathcal{R}_f , s'il reste immobile par rapport à ce référentiel \mathcal{R}_f à tout instant.



Remarque *Nature de l'équilibre*

Les notions d'équilibres stable, instable ou indifférent seront précisées dans le cours de mécanique de deuxième année. La FIGURE 1 permet déjà d'illustrer cette notion.

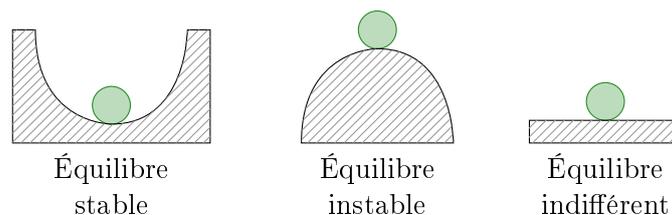


FIGURE 1 – Différents cas d'équilibre.

Lorsque le système matériel Σ est constitué de plusieurs solides indéformables, ce système est dit en équilibre par rapport au référentiel \mathcal{R}_f si tout solide reste fixe par rapport à ce repère \mathcal{R}_f . Cette condition est vérifiée si les paramètres qui définissent la position des solides par rapport à \mathcal{R}_f sont constants au cours du temps.

2.2 Référentiel galiléen

Soit M une particule isolée, sur laquelle ne s'applique aucune action mécanique, de masse m et dont le vecteur vitesse par rapport à un repère R est noté \vec{V} .

La quantité de mouvement de cette particule par rapport à ce repère R est définie par le produit de ces deux grandeurs : $m \vec{V}$.

Galilée a postulé l'existence d'un référentiel \mathcal{R}_g pour lequel la quantité de mouvement par rapport à ce repère R_g est constante quels que soient sa position, sa vitesse et le temps. Un tel référentiel est dit Galiléen.

Cette relation prend le nom de Principe Fondamental de la Dynamique. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} = m \overrightarrow{a_M}$$



Définition Référentiel galiléen

Un référentiel, dans lequel un système isolé ne subissant aucune action mécanique est immobile ou animé d'un mouvement de translation uniforme au cours du temps, est dit « galiléen ».



Remarque

Un référentiel strictement galiléen n'existe pas. Il n'en existe que des approximations plus ou moins exactes dans lesquelles le principe fondamental donne des résultats satisfaisants.

Pour des applications industrielles, le référentiel lié à la Terre est un bon référentiel galiléen.

3 Isolement d'un système matériel

3.1 Frontière d'isolement

On considère un ensemble matériel Σ quelconque (ensemble de solides, solide seul...). On délimite l'ensemble Σ par une frontière. Tout ce qui est en dehors de cette frontière est appelé « milieu extérieur de Σ » et est noté $\bar{\Sigma}$.

La définition de la frontière d'isolement est indispensable avant toute étude, elle permet d'identifier les actions mécaniques s'exerçant sur le système considéré.



Attention

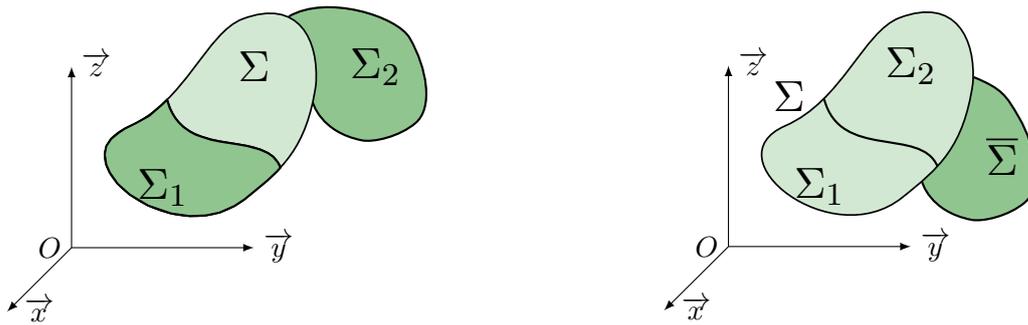
On n'isole jamais le bâti!!!

En effet, le bâti étant le référentiel galiléen, à l'échelle du système industriel étudié, il est très difficile de connaître les actions qui s'exercent sur celui-ci.

3.2 Inventaire des actions mécaniques

Le milieu extérieur $\bar{\Sigma}$ agit sur l'ensemble Σ (ensemble isolé par une frontière) : action de contact ou à distance...

On note $\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\}$ l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ . Plusieurs cas peuvent alors se présenter :



(a) 2 systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur Σ . (b) 2 systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur $\bar{\Sigma}$.

FIGURE 2 – Isolements

- Si deux milieux Σ_1 et Σ_2 disjoints agissent sur Σ ($\bar{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$), alors (FIGURE 2a) :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma}\}$$

- Si Σ est constitué de deux éléments $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (Σ est partitionné) alors (FIGURE 2b) :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1}\} + \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2}\}$$

Pour déterminer les actions mécaniques extérieures, on extrait l'ensemble isolé et on recense pour chaque solide :

- les actions mécaniques de contact **avec l'extérieur** ;
- les actions mécaniques à distance exercées **par l'extérieur**.

On parle de **inventaire (ou bilan) des actions mécaniques extérieures** (IAME ou BAME).



Remarque

Les actions mécaniques intérieures à un système matériel Σ sont l'ensemble des actions mécaniques mutuelles entre les différents sous ensembles de Σ . Elles n'interviennent pas dans ce bilan.

Les propriétés précédentes sont utilisées pour sommer les torseurs d'actions mécaniques une fois l'inventaire des actions mécaniques extérieures réalisé.

3.3 Du graphe des liaisons au graphe de structure

Le graphe de liaisons permet de visualiser le ou les isolement(s) à réaliser et permet de rendre systématique la recherche des actions mécaniques extérieures.



Définition Graphe de structure

Le graphe de structure correspond au graphe des liaisons auquel on ajoute les actions mécaniques à distance qui s'appliquent sur chaque solide, les actions des ressorts, des moteurs, etc ... (1 trait pour les forces, deux traits pour les couples).

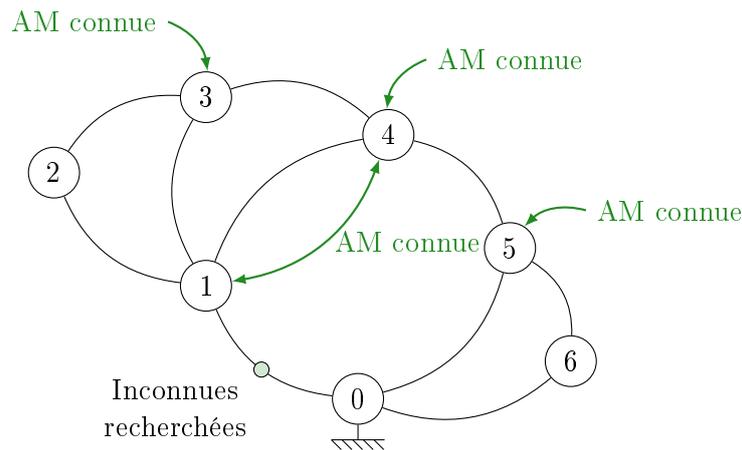


FIGURE 3 – Graphe de structure type d'un système, avec actions connues et inconnues.

Le bâti (pièce de référence) est toujours bien repéré pour ne pas l'isoler (voir FIGURE 3).



Remarque Action mécanique interne

Il est important de savoir repérer si l'action mécanique est interne à un mécanisme :

- un ressort exerce une action mécanique entre deux solides ;
- un fluide exerce une action entre deux solides ;
- dans un moteur constitué d'un rotor et d'un stator, l'effet magnétique génère un couple sur le rotor et le couple opposé sur le stator, on a donc bien une action mécanique entre deux solides.

Par contre, la pesanteur est bien une action extérieure à chaque solide.

4 Principe fondamental de la statique (PFS)

4.1 Énoncé



Définition Principe fondamental de la statique (PFS)

Si un système mécanique Σ est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors, la somme des actions mécaniques de l'extérieur sur Σ est nulle :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

Il est important de bien voir que le PFS est une simple implication (Si ... alors ...). Les deux exemples suivants correspondent à des cas où la réciproque **n'est pas vraie** :

- Pour un moteur électrique en régime permanent, la vitesse angulaire de l'arbre du moteur par rapport au châssis est non nulle et pourtant les actions mécaniques sur le rotor se compensent (le couple moteur compense exactement le couple résistant. Si ce n'était pas le cas, la vitesse angulaire du moteur évoluerait). La somme des actions mécaniques est nulle, mais le système n'étant pas initialement au repos, il ne peut être en équilibre.

- Dans le cas d'une paire de ciseaux dont les deux lames sont en position ouverte, en appliquant deux forces colinéaires, de même amplitude mais de sens opposées sur chaque branche, celles-ci se ferment. La somme des actions mécaniques vaut bien zéro mais le système n'est pas en équilibre !

4.2 Et le principe fondamental de la dynamique alors ?

Le PFS est un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique PFD (cf. deuxième année). Celui-ci s'énonce de la manière suivante : il existe au moins un référentiel, appelé référentiel galiléen \mathcal{R}_g , tel que pour tout système matériel Σ :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g}\}$$

Le torseur de droite est appelé torseur dynamique et fait intervenir les quantités cinématiques, accélérations linéaires et angulaires, ainsi que les quantités de masse (cinétique).

Le PFS est donc un cas particulier du PFD, pour lequel le torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g}\}$ est nul (masses très faibles, inerties négligeables, accélérations nulles ou très petites, etc.).

4.3 Résolution d'un problème de statique

Il n'est pas toujours nécessaire, pour résoudre un problème de statique, de vérifier l'ensemble du PFS. En effet, l'écriture torsorielle revient à poser deux équations vectorielles :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} \\ \overrightarrow{M}_{A, \text{ext} \rightarrow \Sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}$$

- l'équation de résultante statique : $\overrightarrow{R}\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \overrightarrow{F}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = \overrightarrow{0}$;
- l'équation du moment statique en un point : $\overrightarrow{M}_A\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \overrightarrow{M}_{A, \text{ext} \rightarrow \Sigma} = \overrightarrow{0}$.

On parle de **théorème de la résultante statique** et de **théorème du moment statique** en un point donné. On peut ainsi obtenir **6 équations scalaires**.

5 Théorème des actions réciproques



Définition Théorème des actions réciproques

Si un système matériel Σ_2 applique une action mécanique sur Σ_1 , notée $\{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\}$, alors réciproquement, Σ_1 applique l'action opposée sur Σ_2 :

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\} = -\{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\}$$

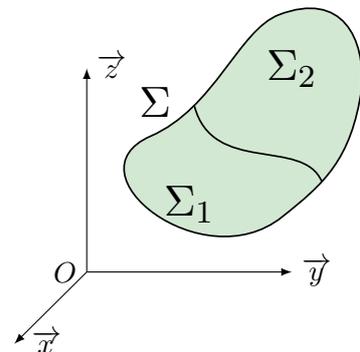


FIGURE 4 – Deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 à l'équilibre.

Démonstration :

Soit Σ l'union de deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 .

En appliquant le PFS à Σ_1 et Σ_2 :

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1}\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2}\} = \{0\}$$

En additionnant les deux équations :

$$\left(\{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\}\right) + \left(\{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\}\right) = \{0\}$$

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\} = \{0\}$$

Sachant que le PFS appliqué à Σ conduit à :

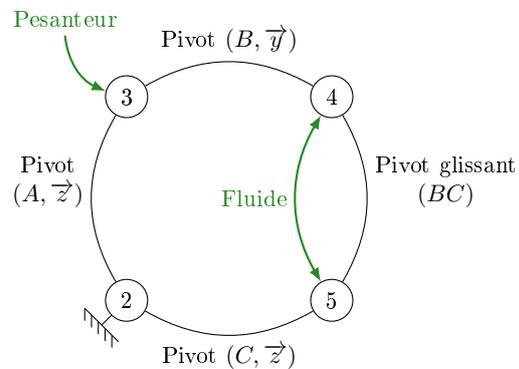
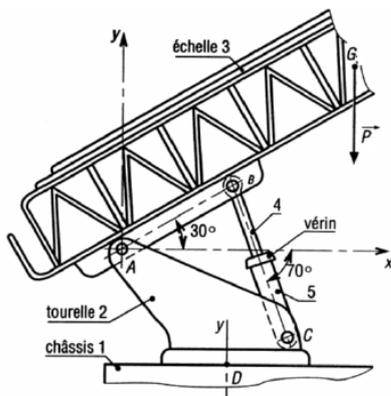
$$\{\mathcal{T}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\} = -\{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\}$$

6 Quelques isollements particuliers

Il s'agit d'étudier l'équilibre de système soumis à deux ou trois forces (glisseurs).

Dans de nombreuses situations, une étude plane des actions mécaniques peut être menée. Dans ces conditions, les actions mécaniques dans les liaisons ponctuelles ou pivot sont des glisseurs.

Exemple : Échelle de pompier

**6.1 Système soumis à deux glisseurs****Définition**

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux glisseurs \vec{F}_B en B et \vec{F}_C en C , les deux forces sont opposées et ont pour droite support la droite (BC) .

Exemple : Échelle de pompier

On se retrouve dans ce cas de figure en isolant l'ensemble $\{4 + 5\}$.

Démonstration :

L'application du principe fondamental de la statique conduit à :

- équation de résultante : $\vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$;
- équation de moment en A : $\vec{0} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}$.

Le support de \vec{F}_C est la droite (BC) et $\vec{F}_B = -\vec{F}_C$.

**Remarque**

Il peut être intéressant de commencer par isoler les ensembles de solides soumis à deux forces car le support de ces forces peut alors être immédiatement identifié.

6.2 Système soumis à trois glisseurs**Définition**

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois glisseurs \vec{F}_A en A , \vec{F}_B en B et \vec{F}_G en G , ces forces sont coplanaires, concourantes ou parallèles et leur somme vectorielle nulle.

Exemple : Échelle de pompier

On se retrouve dans ce cas de figure en isolant **3**.

Démonstration :

L'application du principe fondamental de la statique conduit à :

- équation de résultante : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$.
 - équation de moment en G : $\vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B + \vec{GG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$
- Ce qui s'écrit : $\underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{V}} + \underbrace{\vec{GB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{W}} = \vec{0}$. Donc : $\vec{V} = -\vec{W}$.

Par propriété du produit vectoriel, \vec{V} est \perp au plan (\vec{F}_A, A, G) mais également au plan (\vec{F}_B, B, G) (car $\vec{V} = -\vec{W}$). Les deux plans (\vec{F}_A, A, G) et (\vec{F}_B, B, G) sont donc parallèles et, comme ils possèdent un point commun C , ils sont confondus. Les glisseurs \vec{F}_A et \vec{F}_B appartiennent donc au plan (A, B, G) et comme $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$, les trois forces sont coplanaires au plan (A, B, G) .

Deux cas sont à étudiés :

- Deux de ces forces (\vec{F}_A et \vec{F}_B) sont sécantes en un point I , cela conduit à l'équation : $\underbrace{\vec{IA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{IB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{0}} + \vec{IG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$

Le support de \vec{F}_G passe donc également par le point I . Les trois forces sont concourantes et leur somme vectorielle est nulle.

- Deux de ces forces (\vec{F}_A et \vec{F}_B) sont parallèles, alors la troisième force \vec{F}_G est parallèle aux deux premières car : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$. Elles doivent encore vérifier que la somme des moments est nulle.

7 Méthodes de résolution

Soit un système constitué de plusieurs solides en liaison et soumis à des actions mécaniques extérieures. L'objectif d'une étude de statique des solides est de déterminer les équations liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide. Plusieurs types de problèmes peuvent alors être posés :

- dimensionner le mécanisme, c'est-à-dire déterminer si les liaisons vont résister. On souhaite donc connaître toutes les actions mécanique dans les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures inconnues ;
- seules les actions mécaniques extérieures sont recherchées en fonction d'actions mécaniques connues.

7.1 Méthode systématique

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide individuellement de façon à écrire la totalité des équations disponibles. Cette méthode est celle qui a été employée dans l'exemple précédent du micro-compresseur : toutes les équations ont été écrites. C'est aussi la méthode utilisée dans les logiciels de simulation numérique. Pour chaque isolement, la démarche est la même :

1. Isoler chaque solide sauf le bâti ;
2. Établir l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) : ce point est particulièrement attendu dans la rédaction d'un isolement (et donc obligatoire) ;
3. Écrire le PFS pour chaque solide ;
4. Réduire en un point quelconque les torseurs d'actions mécaniques ;
5. Projeter sur une base quelconque pour obtenir un système d'équations scalaires à résoudre.



Attention

Cette méthode est systématique mais très longue puisqu'il faut tout écrire pour résoudre. Elle n'est à utiliser que si l'énoncé demande explicitement de tout trouver !

Avant même de commencer la résolution, il est possible d'établir un premier bilan du nombre d'équations et d'inconnues du système :

- $6 \times N_S$ équations scalaires (N_S : nombre de solides qu'il est possible d'isoler) en 3 dimensions ou $3 \times N_S$ en modélisation plane ;
- I_s inconnues (I_s : nombre d'inconnues dans les torseurs d'actions mécaniques).

Si $I_s \leq 6 \times N_S$ (ou $3 \times N_S$) alors peut-être que le problème possède une solution. En classe de MP ou PSI, en 2^eannée, l'étude de la théorie des mécanismes permettra de savoir à coup sûr si la résolution est possible.

📖 Support de cours : Micro-compresseur

Le micro-compresseur comporte 4 solides dont le bâti, soit 3 solides « isolables ». L'isolement des 3 solides conduit à 3 équations torsorielles (PFS), soit 6 équations vectorielles et 18 équations scalaires (2 équations vectorielles qui donnent 6 équations scalaires par PFS).

Parmi les 18 équations, la résolution montre deux équations non utilisables (aboutissant à $0 = 0$). Une dans l'isolement de la bielle **2** (équation de moment suivant (A, \vec{y}_2)) et une dans l'isolement du piston **3** (équation de moment suivant (B, \vec{y}_0)).

Ces deux équations non utilisables correspondent aux mobilités internes : une rotation de la bielle sur elle-même suivant (A, \vec{y}_2) et une rotation du piston sur lui-même suivant (B, \vec{y}_0) .

Le bilan des équations disponibles est donc de $18 - 2 = 16$.

Le bilan des inconnues des torseurs d'actions mécaniques s'établit à $I_s = 16$ inconnues ($5 + 4 + 3 + 3 + 1$).

Il y a autant d'inconnues que d'équations donc le système peut être résolu (on dit que le modèle est isostatique).

7.2 Méthode intuitive – Stratégie de résolution

Une méthode plus intuitive peut être très efficace pour celui qui possède une vision plus fine du système, car bien souvent, il n'est pas nécessaire de déterminer la totalité des inconnues.

Lorsque seules quelques inconnues d'actions mécaniques sont recherchées, il faut écrire le minimum d'équations permettant de relier ces inconnues aux données, autant que possible sans faire intervenir les inconnues non recherchées.

Il s'agit alors d'analyser les actions mécaniques dans le mécanisme à partir des mouvements permis par les liaisons (mobilités qui annulent certaines composantes d'efforts dans les liaisons) et d'identifier les efforts qui *travaillent*.

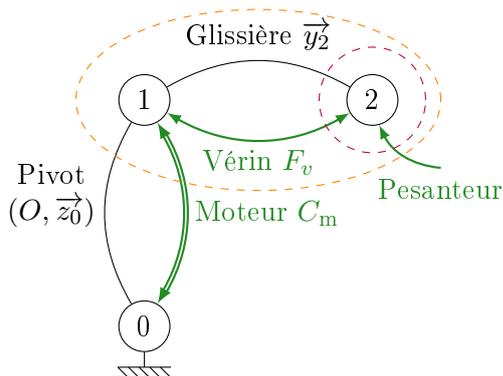


FIGURE 5 – Exemple d'une chaîne ouverte

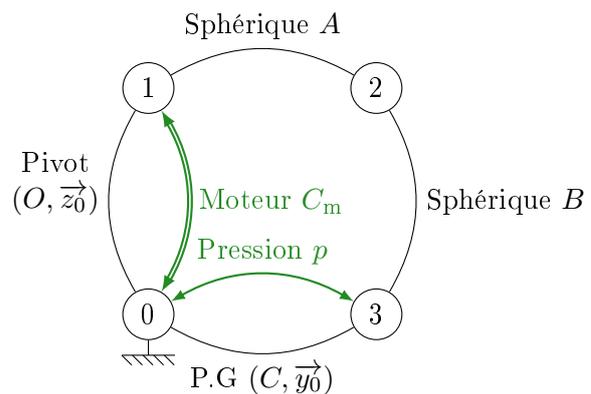


FIGURE 6 – Chaîne fermée du micro-compresseur

Il n'y a rien de systématique par cette méthode mais deux points sont à retenir pour élaborer une stratégie de résolution :

- repérer rapidement les solides soumis à deux forces : leur isolement doit pouvoir conduire à des simplifications utiles sur les actions mécaniques, identifiables sans même écrire le PFS (voir 6.1) ;
- suivant le type de chaîne
 - ◊ pour une chaîne fermée, dans le cas des liaisons avec le bâti, écrire les équations de PFS sur les mobilités de ces liaisons permet de déterminer comment les efforts se transmettent dans le mécanisme ;
 - ◊ pour une chaîne ouverte, l'isolement de l'ensemble des solides allant de la partie ouverte du mécanisme jusqu'à l'actionneur que l'on souhaite dimensionner, permettra de déterminer le résultat en une seule équation.

Exemple : pour la chaîne ouverte de la FIGURE 5

- l'isolement de $\{1+2\}$ permet de déterminer le couple moteur C_m par utilisation de l'équation du moment statique au point O en projection sur l'axe \vec{z}_0 ;
- l'isolement de $\{2\}$ permet de déterminer la force dans le vérin F_v par utilisation de l'équation de la résultante statique en projection sur l'axe \vec{y}_2 .

☞ **Support de cours :** chaîne fermée du micro-compresseur (FIGURE 6)

Dans le cas du micro-compresseur, si l'unique inconnue recherchée est le couple moteur permettant de comprimer le fluide à 8 bar dans la chambre supérieure, il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les équations.

- La bielle **2** étant soumise à deux forces, il est possible de déduire sans calcul que ces forces sont égales en norme et colinéaires à \vec{y}_2 (voir 6.1). Elles s'expriment donc toutes les deux en fonction d'une unique variable T (qui correspond à la norme de chacune des forces);
- Le piston **3** étant en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y}_0) avec le bâti, seules les équations de moment et résultante suivant \vec{y}_0 ne font pas intervenir d'inconnue de liaison de **0** sur **3**. La force T et la pression p travaillent uniquement dans le mouvement de translation suivant \vec{y}_0 (et pas dans le mouvement de rotation d'axe vertical (B, \vec{y}_0)), il faut donc isoler le piston **3** et écrire l'équation de la résultante statique sur \vec{y}_0 pour déterminer T en fonction de la pression p ;
- Pour trouver la relation entre le couple moteur C_m qui s'applique sur l'arbre **1** et la norme T de l'action mécanique de **2** sur **1**, il faut donc isoler l'arbre **1** et utiliser l'équation du moment statique (car on cherche une relation sur le couple C_m). On utilise alors la mobilité de la liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) , soit donc le théorème du moment statique écrit au point O en projection sur \vec{z}_0 qui donnera la relation entre C_m et T .