Modélisation des actions mécaniques

Cours

v3.0

Lycée La Fayette – 21 Bd Robert Schuman – 63000 Clermont-Ferrand – Académie de Clermont-Ferrand

Compétences visées:

B1-04	Qualifier la nature des matières, quantifier les volumes et les masses
B2-12	Prendre en compte les symétries ou les restrictions de mouvement pour simplifier le modèle
B2-16	Associer un modèle à une action mécanique
B2-17	Déterminer la relation entre le modèle local et le modèle global
B2-18	Proposer une modélisation des liaisons avec une définition précise de leurs caractéristiques géométriques

Table des matières

1 Préambule **3**

2 Action mécanique sur un solide **3**

2.1 Notion d'action mécanique . . . 3

2.2 Classification des actions mécaniques . . . 3

2.3 Représentation d'une action mécanique . . . 4

3 Modèle global - modèle local **7**

3.1 Définition . . . 7

3.2 Action mécanique volumique ou massique . . . 8

3.3 Action mécanique surfacique . . . 8

3.4 Action mécanique linéique . . . 9

3.5 Passage d'une formulation locale à une expression globale . . . 9

4 Action mécanique à distance : cas de la pesanteur **10**

4.1 Cas du point . . . 10

4.2 Cas du solide . . . 11

4.3 Centre de gravité d'un solide . . . 11

5 Action mécanique de contact **13**

5.1 Torseur transmissible par un contact . . . 13

5.2 Modèle du contact parfait . . . 13

6 Actions mécaniques dans les liaisons parfaites **14**

6.1 Hypothèses . . . 14

6.2 Cas de la liaison ponctuelle . . . 15

6.3 Cas de la liaison appui-plan . . . 15

6.4 Cas de la liaison pivot glissant . . . 16

6.5 Généralisation . . . 17

6.6 Cas particuliers de la modélisation plane . . . 17

7 Modélisation des actions de contact avec frottements **19**

7.1 Mise en évidence . . . 19

7.2 Modèle de Coulomb . . . 19

7.3 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement . . . 21

1 Préambule

La cinématique a permis l'étude des mouvements sans s'occuper de la cause de ces mouvements. Ce chapitre introduit la notion d'actions mécaniques à l'origine des mouvements des solides. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment proposer un modèle d'action mécanique s'exerçant sur un solide.

2 Action mécanique sur un solide

2.1 Notion d'action mécanique

Définition *Action mécanique*

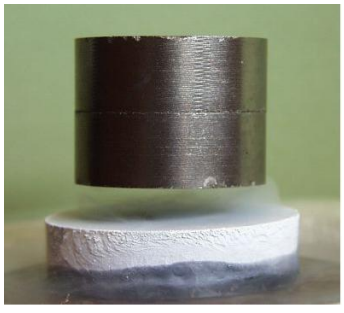
Une action mécanique est un phénomène susceptible de provoquer ou modifier le mouvement d'un solide, ou de le déformer.

Il existe une grande diversité d'action mécanique : action du pied sur un ballon, action du stator sur le rotor pour une machine électrique, action de l'air sur les pales d'un hélicoptère...

2.2 Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon la nature géométrique du domaine sur lequel elles s'appliquent (contact ou non, intérieurs ou extérieurs...). On distingue ainsi :

- les actions à distance exercées en chaque point d'un corps (pesanteur mis en évidence par le lâcher d'une balle, champ électromagnétique mis en évidence par l'action d'un aimant, champ électrostatique sur une particule...)
- les actions de contact entre différents milieux :
  - ◇ contact surfacique (pression de l'eau sur un barrage, liaison rotule...)
  - ◇ contact linéique ou ponctuel si la zone de contact est petite (liaison sphère-plan, liaison cylindre-plan...)



(a) Action à distance

(b) Action ponctuelle

(c) Action surfacique

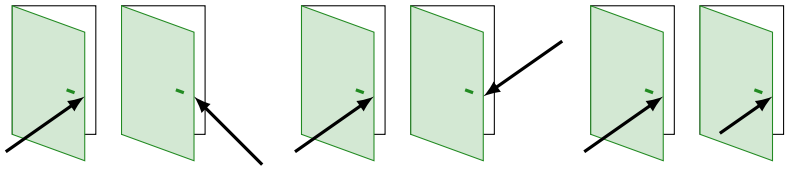
FIGURE 1 – Classification des actions mécaniques

2.3 Représentation d'une action mécanique

2.3.1 Notion de force

Pour mettre en mouvement une porte, il est nécessaire d'appliquer une force caractérisée par :

- sa direction ;
- son sens ;
- son intensité.

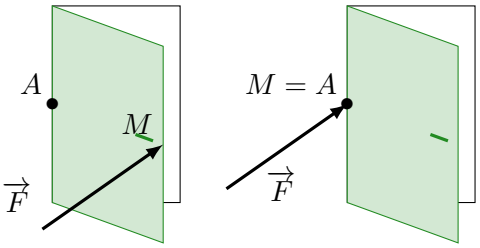


Direction Sens Intensité

L'utilisation d'un vecteur $\overrightarrow{F}$ pour modéliser une force semble donc adaptée. L'unité est le **Newton** (N). Une force caractérise donc la **tendance** d'une action mécanique à **mettre localement en translation un solide**.

2.3.2 Notion de moment

Cette seule donnée d'une force n'est pas suffisante pour décrire une action mécanique. Pour une même force, les effets sont différents suivant les points d'application.



On introduit la notion de moment au point A de la force $\overrightarrow{F}$ (appliquée localement en M) qui caractérise l'effet de la force en un point donné : $\overrightarrow{M_{A,\overrightarrow{F}}} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$ (dont les composantes sont exprimées en N.m).

> **Remarque**
>
> Cette notion est indispensable car c'est parfois la seule manière de représenter simplement l'effet d'une action mécanique (exemple : action de la main sur une poignée de porte, action entre le stator et le rotor d'une machine électrique (machine à courant continu, asynchrone, synchrone...).

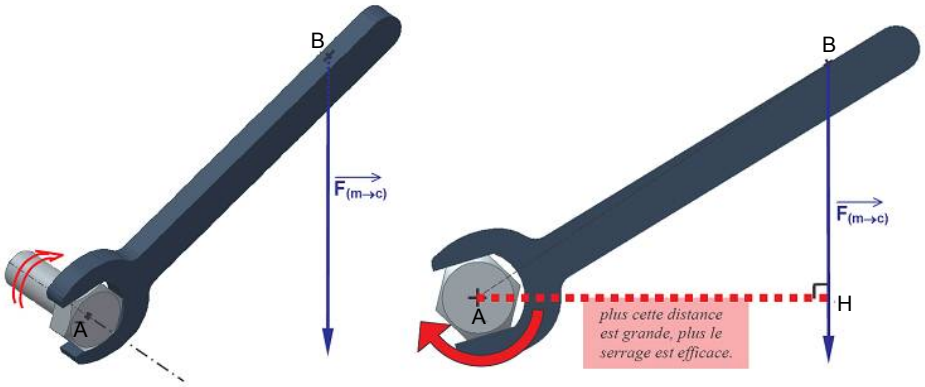
Un moment caractérise ainsi la **tendance** d'une action mécanique à **mettre en rotation un solide autour d'un axe donné**.

L'expression du moment en un point prend en compte la distance de la force au point d'application et permet de représenter l'effet de la force (rotation possible autour d'un axe et selon un sens donné)

L'exemple suivant illustre les caractéristiques du moment.

On modélise l'action mécanique de la main sur la clé par une force appliquée au point B, représentée par le vecteur $\overrightarrow{F_{m\to c}}$. C'est cette force qui permet de serrer la vis en la faisant « tourner » autour du point A.

On dit que la force appliquée en B crée un moment au point A.



On constate que $\overrightarrow{M_{A,m\to c}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{m\to c}} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{F_{m\to c}}$ où H est le projeté orthogonal de B sur le support de la force $\overrightarrow{F_{m\to c}}$.

Définition *Bras de levier*

La distance AH est appelée **bras de levier** : distance la plus courte du support de la force au point d'application.

Cette notion est utilisée en pratique pour calculer rapidement le moment d'une force sans passer par le produit vectoriel.

Par définition du produit vectoriel, le vecteur moment est orthogonal au plan contenant le vecteur force $\overrightarrow{F}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A le point où le moment est calculé.

2.3.3 Torseur d'action mécanique

Définition *Action mécanique*

Une action mécanique est donc représentée par :

- un vecteur $\overrightarrow{F}$;
- un moment en A : $\overrightarrow{M_{A,\overrightarrow{F}}} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$.

Si on écrit l'effet de la force en B, on obtient :

$$\overrightarrow{M_{B,\overrightarrow{F}}} = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{M_{A,\overrightarrow{F}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

On constate donc que le champ de moment est un champ antisymétrique, il est donc représentable par un torseur.

Définition *Torseur des actions mécaniques*

Ainsi toute action mécanique est caractérisée par un torseur :

$$\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{i\to j}} \\ \overrightarrow{M_{A,i\to j}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & M_x(A) \\ F_y & M_y(A) \\ F_z & M_z(A) \end{array} \right\}_{A,b} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{A,b}$$

Le vecteur force $\overrightarrow{F_{i\to j}}$ est appelé **résultante** de l'action mécanique de i sur j.

Pour exprimer l'action mécanique en un autre point, il suffit d'utiliser la relation de changement de point d'un torseur :

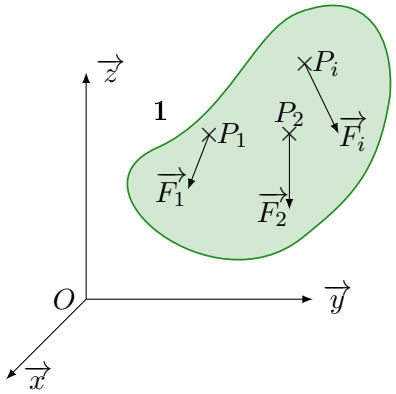
Définition *Formule de changement de point*

$$\overrightarrow{M_{B,i\to j}} = \overrightarrow{M_{A,i\to j}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{i\to j}}$$

2.3.4 Effet de plusieurs actions mécaniques

Lorsqu'il y a plusieurs actions mécaniques sur un même solide **1**, on additionne les torseurs (en écrivant les torseurs au même point) :

$$\sum_{i=0}^{n} \{\mathcal{T}_{i\to 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum \overrightarrow{F_i} \\ \sum \overrightarrow{M_{A,i\to 1}} \end{array} \right\}_A$$



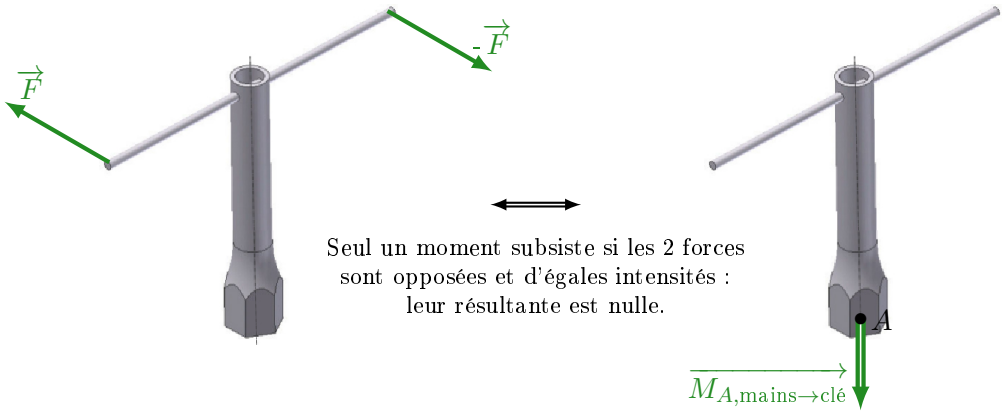
Remarque

On note : $\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{F_{1\to 2}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} \end{array} \right\}_A$ l'action mécanique du solide **1** sur le solide **2**.

2.3.5 Torseurs particuliers

Un **torseur couple** est de la forme $\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{C} \end{array} \right\}_M$ et s'écrit de la même manière en tout point. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire tourner un solide.

Exemples : poignée de porte, tire-bouchon, stator/rotor...



Un **torseur glisseur** est de la forme $\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_M$ au point d'application de la force. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire déplacer en translation un solide. La droite $\left(M, \overrightarrow{F}\right)$ est l'axe du glisseur.

En général, par abus de langage, on appelle **Force** l'action mécanique correspondant à un glisseur.

Exemple : action du pied sur un ballon

2.3.6 Compléments sur les torseurs

Un torseur $\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{i\to j}} \\ \overrightarrow{M_{A,i\to j}} \end{Bmatrix}_A$ est un **glisseur** si : $\overrightarrow{F_{i\to j}} \cdot \overrightarrow{M_{A,i\to j}} = 0$ (si : $\overrightarrow{F_{i\to j}} \neq \overrightarrow{0}$)

L'**axe central d'un torseur** est une droite constituée des points P tels que : $\overrightarrow{F_{i\to j}} \wedge \overrightarrow{M_{P,i\to j}} = \overrightarrow{0}$ (moment colinéaire à la résultante). On montre que cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{F_{i\to j}}$.

Dans le cas d'un glisseur, l'axe central est l'ensemble des points où le moment est nul. **L'axe central est donc l'axe du glisseur**.

3 Modèle global - modèle local

3.1 Définition

La matière (liquide, solide ou gazeuse) est constituée d'atomes. Cependant, à l'échelle où la matière est considérée comme liquide, solide ou gazeuse, les atomes sont suffisamment proches pour modéliser la matière comme une répartition continue.

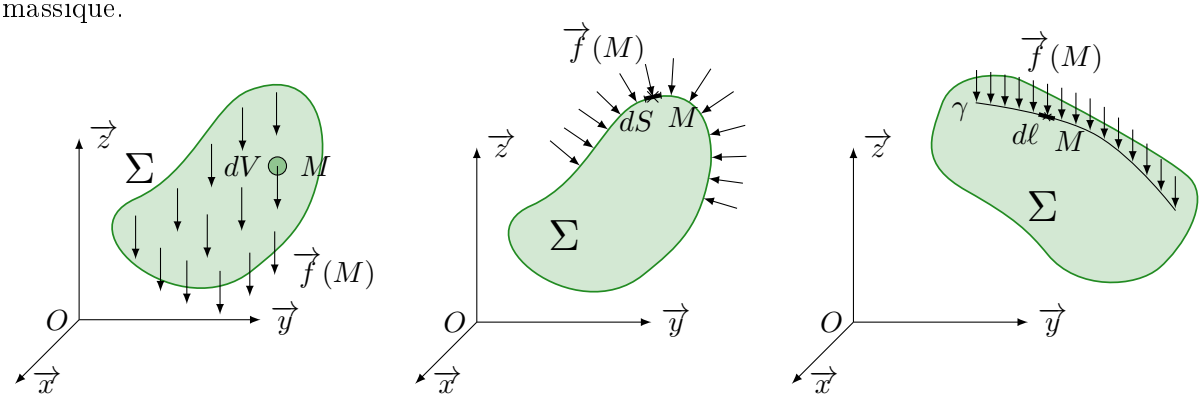
Les actions mécaniques s'appliquent sur cette matière continue. Ces actions peuvent se modéliser mathématiquement sous la forme d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{f}(M)$ appelée densité d'effort qui peut être volumique, surfacique ou linéique selon le modèle employé.

3.2 Action mécanique volumique ou massique

Une action mécanique **volumique** $\overrightarrow{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de volume dV, qui à tout point M de Σ associe une action mécanique $\overrightarrow{f}(M)dV$ s'exerçant sur l'élément de volume dV au voisinage de M (FIGURE 2a).

Une action mécanique **massique** $\overrightarrow{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de masse dm, qui à tout point M de Σ associe une action mécanique $\overrightarrow{f}(M)\,dm$ s'exerçant sur l'élément de masse dm au voisinage de M.

Une action mécanique massique peut s'exprimer sous la forme d'une action volumique par l'intermédiaire de la masse volumique $\rho(M)$: $dm = \rho(M)\,dV$. La masse volumique étant une propriété du solide et non de l'action mécanique, il est parfois préférable d'exprimer l'action mécanique sous forme massique.



(a) Action mécanique volumique. (b) Action mécanique surfacique. (c) Action mécanique linéique.

FIGURE 2 – Modélisation locale des actions mécaniques

Exemple : la pesanteur

L'action mécanique massique s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{poids}}} = \overrightarrow{g}$, associée à dm l'élément de masse. L'action mécanique élémentaire s'exerçant sur dm s'écrit $\overrightarrow{dP_{\text{poids}}} = \overrightarrow{g}\,dm$.

3.3 Action mécanique surfacique

Une action mécanique **surfacique** $\overrightarrow{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de surface dS, qui, à tout point M de l'enveloppe extérieure (Env) de Σ, associe une action mécanique $\overrightarrow{f}(M)dS$ s'exerçant sur l'élément de surface dS au voisinage de M (FIGURE 2b).

Exemple : pression d'un fluide parfait (ou au repos) sur un solide

L'action surfacique s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{pression}}(M)} = -p(M)\overrightarrow{n}$, associée à l'élément de surface dS est la pression du fluide en M et $\overrightarrow{n}$ la normale extérieure à la surface en M (FIGURE 2b).

L'effort de pression élémentaire est alors $\overrightarrow{dP_{\text{pression}}} = -p\overrightarrow{n}dS$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à la surface dS.

Exemple : écoulement de l'air autour d'un profil d'aile d'avion

Lorsqu'une aile d'avion se déplace, les mouvements des masses d'air conduisent à des variations de pression qui créent une force de portance et une force de traînée sur l'aile.

L'action de l'air sur l'aile résulte d'une répartition surfacique d'efforts telle que le décrit la FIGURE 3 : une surpression apparaît sous l'aile et une forte dépression apparaît en partie supérieure.

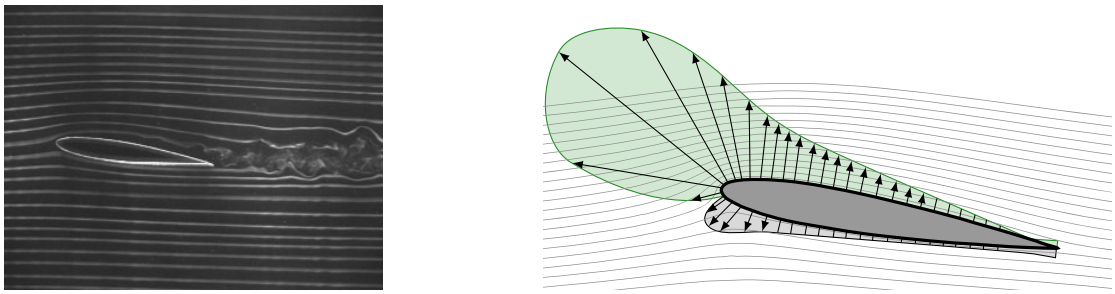


FIGURE 3 – Écoulement de l'air autour d'une aile et répartition de pression

3.4 Action mécanique linéique

Une action mécanique **linéique** $\overrightarrow{f}(M)$ le long d'une courbe γ sur Σ est un champ de vecteurs associé à un élément de longueur $d\ell$, qui à tout point M de la courbe γ associe une action mécanique $\overrightarrow{f}(M)d\ell$ s'exerçant sur l'élément de longueur $d\ell$ au voisinage de M (FIGURE 2c).

3.5 Passage d'une formulation locale à une expression globale

Lorsqu'une action volumique, surfacique ou linéique $\overrightarrow{f}(M)$ connue s'exerce sur un solide Σ, la première étape de l'étude consiste à déterminer le torseur d'action mécanique équivalent pour le solide. Chaque action élémentaire locale en chaque point M peut être considérée comme une action mécanique traduite par un torseur élémentaire :

$$\left\{d\mathcal{T}_{\overrightarrow{f}\to\Sigma}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{dF_{\overrightarrow{f}\to\Sigma}} = \overrightarrow{f}(M)d\mu \\ \overrightarrow{dM_{M,\overrightarrow{f}\to\Sigma}}\end{array}\right\}_M$$

avec $d\mu$ une mesure de la zone au voisinage de M (FIGURE 4). $d\mu$ est un élément de volume dV, un élément de masse dm, un élément de surface dS ou un élément de longueur $d\ell$

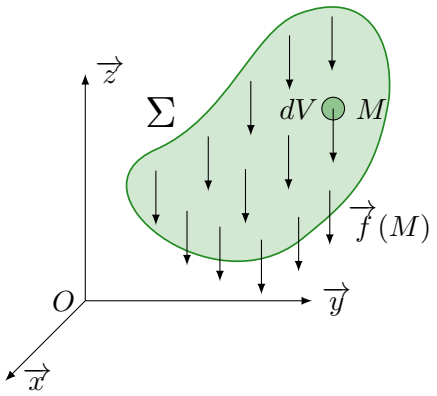


FIGURE 4 – Action mécanique volumique $\overrightarrow{f}(M)$ s'exerçant sur un système matériel Σ

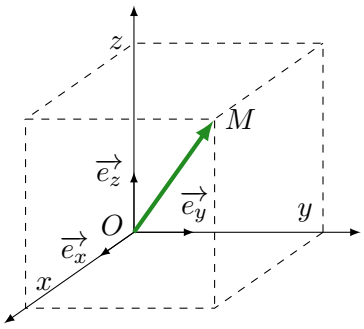
Dans la plupart des cas, l'action locale est un champ de force donc $\overrightarrow{dM_{M,\overrightarrow{f}\to\Sigma}} = \overrightarrow{0}$. Cette hypothèse est conservée pour la suite de l'étude, mais l'expression peut s'appliquer lorsqu'un moment local existe comme par exemple pour le cas d'un aimant dans un champ magnétique.

Le torseur global des actions mécaniques est obtenu en faisant l'intégrale de l'ensemble des actions élémentaires en tout point du solide. Attention, il faut que les torseurs soient écrits au même point pour faire la somme !

On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{1\to2}} = \displaystyle\int_\tau \overrightarrow{dF_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1\to2}} = \displaystyle\int_\tau \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{dF_{1\to2}}\end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{1\to2}} = \displaystyle\int_\tau f(M)\overrightarrow{u}(M)d\tau \\ \overrightarrow{M_{A,1\to2}} = \displaystyle\int_\tau \overrightarrow{AM}\wedge f(M)\overrightarrow{u}(M)d\tau\end{array}\right\}_A$$

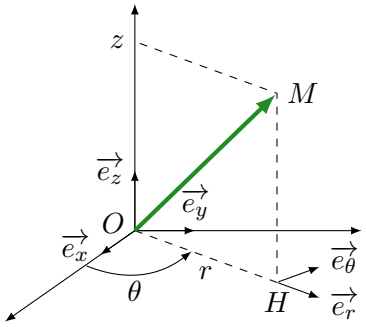
τ peut être soit un volume, soit une surface ou une ligne de contact. On se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume, de surface ou d'une ligne.



Coordonnées cartésiennes

$M(x,y,z)$

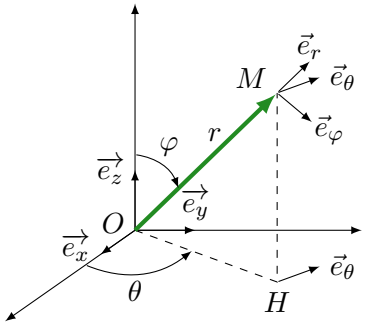
$\overrightarrow{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$



Coordonnées cylindriques

$M(r,\theta,z)$

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r} + z.\vec{e_z}$



Coordonnées sphériques

$M(r,\varphi,\theta)$

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r}$

Remarque

Le passage d'une action locale à une action globale est toujours possible. L'inverse nécessite des hypothèses sur le modèle local.

Attention

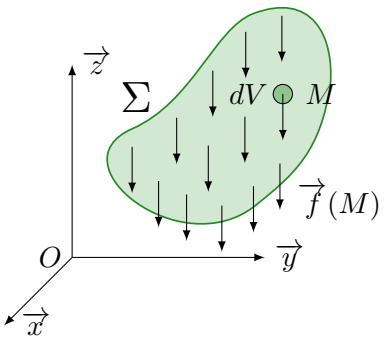
Bien que représentant un même phénomène réel, les deux représentations locale ou globale ne sont pas équivalentes. Le passage du local au global par intégration s'accompagne d'une perte d'information sur la « répartition spatiale » de l'action mécanique. En mécanique des structures déformables, par exemple, le modèle devra être choisi avec prudence.

4 Action mécanique à distance : cas de la pesanteur

4.1 Cas du point

Dans le cas où l'on considère l'effort exercé par la pesanteur sur un point matériel de masse m, on sait que le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ avec $\overrightarrow{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur qui est vertical dirigé vers le bas, de norme $m.g$ avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

4.2 Cas du solide



Dans le cas d'un solide de volume V, placé dans un champ de pesanteur, on a pour le modèle local : $\overrightarrow{dF_{\text{pes}\to S}}(M) = f(M)\vec{u}(M)\,dV$ où :

- $\vec{u}(M) = -\vec{z}$
- $f(M)$ est la densité volumique de force au voisinage du point M. Pour un matériau homogène, $f(M) = \rho g = \text{cste}$ où ρ est la masse volumique du solide.

On peut donc maintenant calculer le torseur des actions de pesanteur sur le solide :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{pes}\to S}} = \displaystyle\int_V -\rho g.\vec{z}\,dV \\ \overrightarrow{M_{A,\text{pes}\to S}} = \displaystyle\int_V \overrightarrow{AM} \wedge -\rho g.\vec{z}\,dV \end{array} \right\}_A$$

Cas particulier d'une masse volumique constante :

- $\overrightarrow{F_{\text{pes}\to S}} = \displaystyle\int_\tau -\rho g.\vec{z}\,dV = -\rho g.\vec{z}\int_\tau dV = -\rho V g.\vec{z} = -mg.\vec{z}$
- $\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\to S}} = \displaystyle\int_\tau \overrightarrow{AM} \wedge -\rho g.\vec{z}\,dV = -\rho g\left(\int_\tau \overrightarrow{AM}\,dV\right) \wedge \vec{z}$

4.3 Centre de gravité d'un solide

Définition *Centre de gravité d'un solide*

Le centre de gravité d'un solide est le barycentre des points matériels du solide affectés d'un coefficient proportionnel à leurs masses. Sa position est définie par la relation :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_V \overrightarrow{AM}\,\rho\,dV = \frac{1}{m}\sum_i m_i\overrightarrow{AM_i}$$

Remarque : G peut être en dehors de la matière (ex : sphère creuse...)

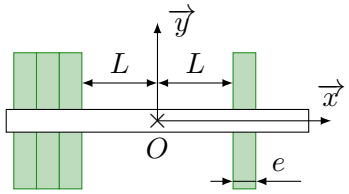
Dans le cas d'une masse volumique constante, on peut dire que :

- si S possède un plan de symétrie, G est sur le plan de symétrie ;
- si S possède un axe de symétrie, G est sur l'axe de symétrie ;
- si S possède un centre de symétrie, G est confondu avec ce centre.

Remarque

Si le solide n'est pas homogène (masse volumique différente dans plusieurs domaines), il suffit de calculer le centre de gravité de chaque partie et de trouver le centre de gravité global par la définition du centre de gravité d'un ensemble matériel $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\overrightarrow{AG_i}$ où les G_i sont les centres de gravité de chaque domaine homogène et m_i leurs masses respectives.

Exemple 1 : Haltères



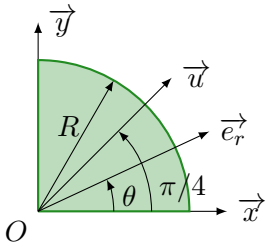
On note : $m_1 = 0{,}3\,\text{kg}$ la masse de la barre et O son centre de gravité. On note $m_2 = 1\,\text{kg}$ la masse des poids dont le centre de gravité est situé sur l'axe $(O, \vec{x})$ au centre du poids. Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble.

On a : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}$ avec :

- $\overrightarrow{OG_1} = -\left(L + \dfrac{5}{2}e\right)\vec{x}$
- $\overrightarrow{OG_2} = -\left(L + \dfrac{3}{2}e\right)\vec{x}$
- $\overrightarrow{OG_3} = -\left(L + \dfrac{1}{2}e\right)\vec{x}$
- $\overrightarrow{OG_4} = \left(L + \dfrac{1}{2}e\right)\vec{x}$

Soit : $\overrightarrow{OG} = -\dfrac{1}{m_1 + 4m_2} m_2 \left(L + \dfrac{5}{2}e + L + \dfrac{3}{2}e\right)\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} = -\dfrac{2m_2}{m_1 + 4m_2}(L + 2e)\,\vec{x}$

Exemple 2 : Quart de disque



On note la masse du 1/4 de disque : $m_d = \rho_s S$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité. Montrer qu'il est situé sur l'axe $(O, \vec{u})$.

$$m\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\,dm \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{S}\int_S \overrightarrow{OM}\,dS$$

On se place en coordonnées polaires, avec : $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\left(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}\right) \\ dS = r\,dr\,d\theta \end{cases}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}\right) dr\,d\theta = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}\right) d\theta$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \frac{4R}{3\pi}\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}\,\vec{u}$$

Dans le cas particulier où les éléments de réduction du torseur sont écrits au centre de gravité G, on a $\overrightarrow{M_{G,\text{pes}\to S}} = \vec{0}$ car $\displaystyle\int_V \overrightarrow{GM}\,dV = \vec{0}$ par définition du centre de gravité dans le cas d'une masse volumique constante. Ainsi :

Définition *Torseur de la pesanteur sur un solide S*

Le torseur de la pesanteur est un torseur glisseur :

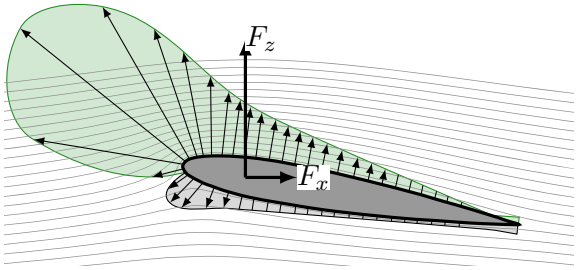
$$\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to S}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{pes}\to S}} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$$

On définira toujours cette action mécanique de pesanteur en G pour simplifier les calculs.

5 Action mécanique de contact

On considère deux solides **1** et **2** en contact selon une surface S.

5.1 Torseur transmissible par un contact



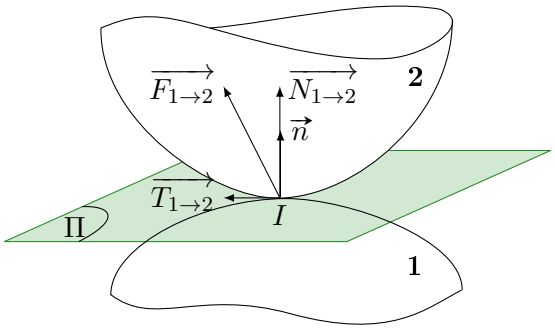
Soit P un point de S et un élément de surface dS autour de P.

L'action mécanique élémentaire de 1 sur 2 au niveau de dS peut être modélisée par un effort élémentaire : $\overrightarrow{dF_{1\to2}}(P) = f(P)\vec{u}(P)dS$

Le torseur des actions mécaniques du solide **1** sur **2** est déterminé par l'intégration sur la surface S de la densité d'effort en un point quelconque A.

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{1\to2}}(P) = \displaystyle\int_S \overrightarrow{dF_{1\to2}}(P) \\ \overrightarrow{M_{A,1\to2}} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{1\to2}}(P) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{1\to2}} = \displaystyle\int_S f(P)\vec{u}(P)dS \\ \overrightarrow{M_{A,1\to2}} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{AP} \wedge f(P)\vec{u}(P)dS \end{Bmatrix}_A$$

5.2 Modèle du contact parfait



Définition

Dans le cas d'un **contact parfait**, c'est-à-dire **sans frottement**, l'action mécanique élémentaire est portée par la normale à la surface de contact élémentaire.

Le vecteur $\vec{u}(P) = \vec{n}$ est la normale au point de contact considéré (si on considère l'action du solide **1** sur **2**, la normale est celle qui va de **1** vers **2**).

L'expression de la densité d'effort est dans le cas général inconnue mais seule la connaissance de la géométrie du contact peut permettre de remonter à la forme du torseur des actions transmissibles (voir paragraphe sur les liaisons).

Définition

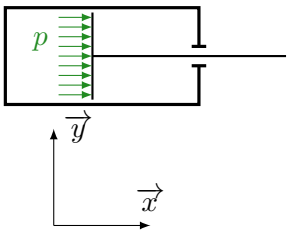
La densité d'effort est en revanche souvent connue dans le cas d'un contact d'un fluide sur un solide, on la nomme **pression**.

Cette pression est déterminée par les lois de la mécanique des fluides (voir cours de physique).

Exemple 1 : Action dans un vérin

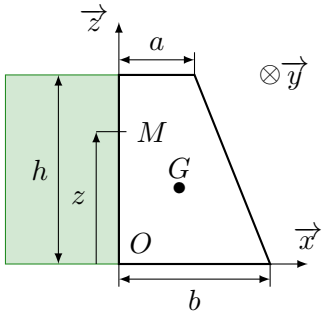
Dans un vérin, la pression est considérée comme constante en première approximation : $f(P) = p$ et $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{x}$; on note le rayon du piston R. On montre que :

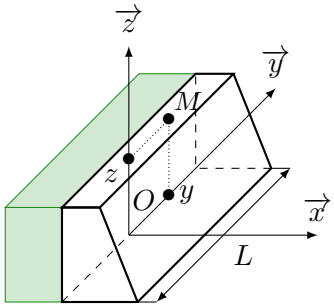
$$\overrightarrow{F_{\text{fluide}\to\text{tige}}} = pS.\overrightarrow{x} = p\pi R^2.\overrightarrow{x}$$



Exemple 2 : Action de l'eau sur un barrage

Dans un barrage électrique, la pression de l'eau sur le barrage dépend linéairement de la hauteur du fluide





$f(M) = p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g(h - z)$; $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{x}$; on note la largeur du barrage $L = 130\,\text{m}$, la hauteur du barrage $h = 20\,\text{m}$ et la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$; le point O est situé au milieu du barrage suivant l'axe $\overrightarrow{y}$.

On montre que : $\{\mathcal{T}_{\text{eau}\to\text{barrage}}\} = \begin{Bmatrix} Lh\left(p_{\text{atm}} + \rho g\dfrac{h}{2}\right).\overrightarrow{x} \\ L\dfrac{h^2}{6}\left(3p_{\text{atm}} + \rho g h\right).\overrightarrow{y} \end{Bmatrix}_O$

L'axe central est en A tel que $\overrightarrow{OA} = c.\overrightarrow{z}$ avec : $c = \dfrac{h}{3} \times \dfrac{3p_{\text{atm}} + \rho g h}{2p_{\text{atm}} + \rho g h}$

On a : $\{\mathcal{T}_{\text{eau}\to\text{barrage}}\} = \begin{Bmatrix} Lh\left(p_{\text{atm}} + \rho g\dfrac{h}{2}\right).\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_A$

6 Actions mécaniques dans les liaisons parfaites

6.1 Hypothèses

On suppose que toutes les liaisons sont parfaites :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites ;
- les jeux sont nuls ;
- le contact est sans frottement ni adhérence.

6.2 Cas de la liaison ponctuelle

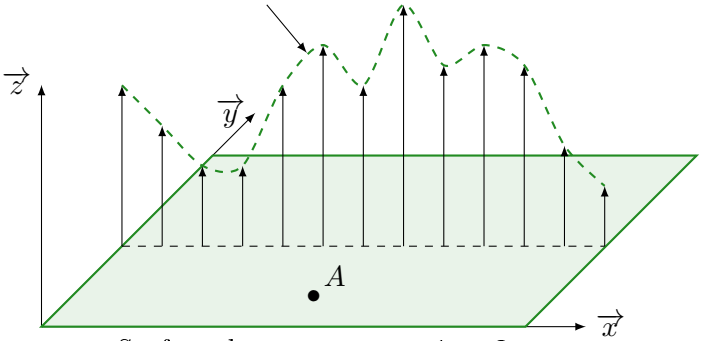
Dans le cas d'une zone de contact ponctuel, le moment est nécessairement nul et il n'y a plus de notion de densité d'effort. Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison ponctuelle se limite à une seule composante sur la résultante portée par la normale au contact :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{1\to 2}} = Z_{12}.\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O\,(-,-,\overrightarrow{z})} \quad \text{(pour un contact de normale } \overrightarrow{z} \text{ au point } O)$$

6.3 Cas de la liaison appui-plan

Dans le cas d'une liaison appui-plan, la surface de contact entre les deux solides est un plan. La densité d'effort élémentaire est portée par la normale extérieure au plan de contact et seule son intensité est inconnue.

densité d'effort sur une ligne de la surface de contact entre **1** et **2**



Surface de contact entre **1** et **2**

On sait que la résultante du torseur des actions transmissibles par la liaison appui-plan est : $\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \int_S f(M)\overrightarrow{u}(M)dS \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{u}(M) = \overrightarrow{z}$

On en déduit que pour la résultante :

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{F_{1\to 2}} = \int_S f(M)dS.\overrightarrow{z} = Z_{12}.\overrightarrow{z}$$

De même pour le moment :

On écrit le moment en un point A (de coordonnées (x, y)) du plan de contact :

$$\overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge f(M)dS.\overrightarrow{z} = \int_S (x.\overrightarrow{x} + y.\overrightarrow{y}) \wedge f(M)dS.\overrightarrow{z}$$

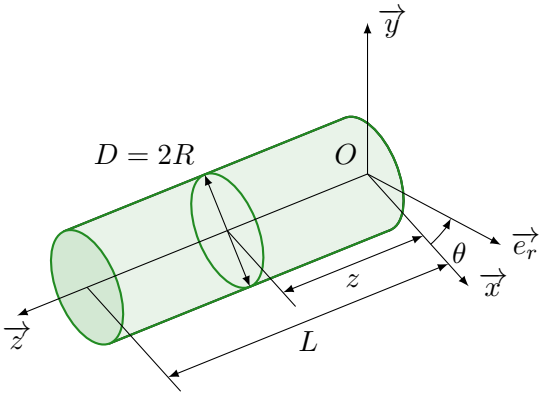
Soit : $\overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = L_{12}.\overrightarrow{x} + M_{12}.\overrightarrow{y}$

On en déduit que la forme du torseur des actions transmissibles par la liaison appui-plan est :

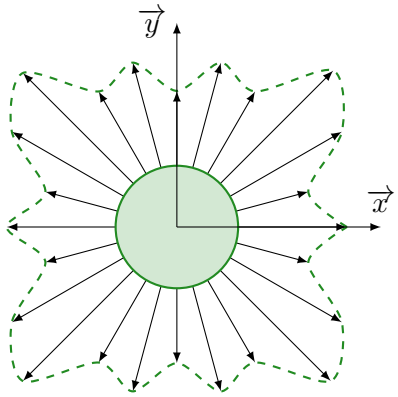
$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{12}.\overrightarrow{z} \\ L_{12}.\overrightarrow{x} + M_{12}.\overrightarrow{y} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{A\,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

6.4 Cas de la liaison pivot glissant

Dans le cas d'une liaison pivot glissant, la surface de contact entre les deux solides est un cylindre. La densité d'effort élémentaire est portée par la normale extérieure au plan de contact et seule son intensité est inconnue.



Surface de contact entre **1** et **2**



Densité d'effort sur un cercle de la surface de contact entre **1** et **2**

Le point courant M est défini par : $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r} + z.\vec{z}$ en coordonnées cylindriques. L'action mécanique élémentaire au point M est modélisée par un glisseur tel que : $\overrightarrow{dF_{1\to 2}} = f(M).\vec{e_r}dS$.

En coordonnée cylindrique l'élément de surface élémentaire s'écrit $dS = rd\theta dz$

La résultante s'écrit :

La normale au contacte est constante : $\vec{n}(M) = \vec{e_r} = \cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\vec{y}$

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{F_{1\to 2}} = \int_S f(M)\left(\cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\vec{y}\right)dS = f(M)\left(\int_S \cos\theta dS.\vec{x} + \int_S \sin\theta dS.\vec{y}\right)$$

Soit : $\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y}$

Le moment au point O s'écrit :

$$\overrightarrow{M_O\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = \overrightarrow{M_{O,1\to 2}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge f(M)dS.\vec{e_r} = \int_S (r.\vec{e_r} + z.\vec{z}) \wedge f(M)dS.\vec{e_r}$$

$$\overrightarrow{M_O\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = -\int_S zf(M)\sin\theta dS.\vec{x} + \int_S zf(M)\cos\theta dS.\vec{y}$$

Soit : $\overrightarrow{M_O\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}} = L_{12}.\vec{x} + M_{12}.\vec{y}$

On en déduit la forme du torseur des actions transmissibles par une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{\begin{array}{c} X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y} \\ L_{12}.\vec{x} + M_{12}.\vec{y} \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

6.5 Généralisation

Sur les trois exemples précédents, on peut constater qu'à une composante nulle du vecteur taux de rotation correspond une composante non nulle sur le moment transmissible. De même à une composante nulle du vecteur vitesse correspond une composante non nulle de la résultante transmissible.

Remarque

Si on compare le torseur d'action transmissible d'une liaison parfaite avec son torseur cinématique, on constate que :

$$\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}}\cdot\overrightarrow{M_A\{\mathcal{V}_{2/1}\}}+\overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}}\cdot\overrightarrow{R\{\mathcal{V}_{2/1}\}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{F_{1\to 2}}\cdot\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}+\overrightarrow{M_{A,1\to 2}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{2/1}}=0$$

Cette équation traduit le fait que la puissance mutuelle des actions mécaniques de contact dans une liaison parfaite est nulle (cf. cours de deuxième année).

On en déduit le tableau récapitulatif des torseurs cinématique et d'action transmissible des liaisons normalisées donné en annexe.

Pour déterminer une action mécanique dans une liaison, on n'utilise pas le modèle local-global, on préfère utiliser cette dualité cinématique/action mécanique.

6.6 Cas particuliers de la modélisation plane

Sous certaines conditions de mouvement plan, il est possible de simplifier les torseurs cinématiques associés aux modèles cinématiques des liaisons. Dans le cas d'un mouvement plan de normale $\vec{x}$, seules les vitesses selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$ et la vitesse angulaire selon $\vec{x}$ sont non nulles. Le torseur cinématique ne comporte alors que trois composantes « utiles » :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\begin{Bmatrix}\omega_{2/1}^{x} & 0\\ 0 & V_{M,2/1}^{y}\\ 0 & V_{M,2/1}^{z}\end{Bmatrix}_{M}^{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Cette simplification est également possible pour les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons. Seules trois composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison seront « utiles » :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}=\begin{Bmatrix}\diagup & L_{12}\\ Y_{12} & \diagup\\ Z_{12} & \diagup\end{Bmatrix}_{M}^{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les composantes ignorées sont notées par un trait « $\diagup$ » ou par « $\varnothing$ » . Elles ne sont pas obligatoirement nulles mais leurs valeurs n'influent pas sur la résolution du problème plan étudié.

Cette forme du torseur des actions transmissibles peut se justifier par deux approches :

- La première est liée aux mouvements. Il est possible d'analyser les actions mécaniques comme une entité qui va empêcher un mouvement possible du mécanisme étudié. Pour s'opposer à une rotation d'axe $(A,\vec{x})$, il faut appliquer un couple selon $\vec{x}$. Pour interdire les déplacements selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$, il faut appliquer des forces selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Cette approche n'est pas nécessairement intuitive lorsque rien ne bouge réellement...

- La seconde est liée aux actions mécaniques. Dans le cas particulier de symétrie de la géométrie et de symétrie des actions mécaniques par rapport à un plan, par exemple $(O, \vec{y}, \vec{z})$, il est possible de montrer que le torseur des actions transmissibles s'écrit sous la forme proposée (la FIGURE 5 illustre ces propos dans le cas d'actions mécaniques surfaciques).

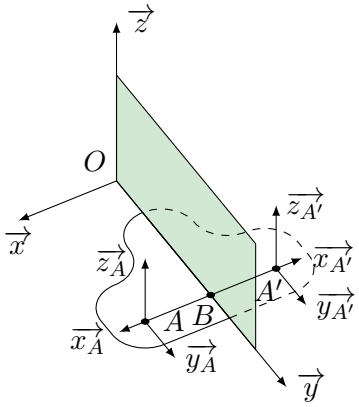


FIGURE 5 – Cas particulier d'une action mécanique surfacique possédant un plan de symétrie pour la géométrie et les actions mécaniques.

Dans ces conditions (symétrie de la géométrie et des actions mécaniques) le torseur des actions mécaniques est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{M \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Les termes habituellement marqués par un trait « $/$ » sont rigoureusement nuls. La modélisation plane n'est donc pas une approximation dans ce cas particulier, mais juste une simplification de l'écriture du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Lorsque la modélisation plane des actions mécaniques est invoquée en dehors des cas de symétrie énoncés précédemment, il s'agit alors d'une hypothèse. On suppose (ou par expérience, on sait) que les actions mécaniques non recherchées n'interviennent pas dans la résolution du problème étudié.

Le nombre d'inconnues est limité à trois au maximum par torseur d'actions mécaniques de liaison.

Exemple 1 : Cas d'une liaison pivot

Le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ dans le cadre d'une étude plane de normale $\vec{x}$ (plan de symétrie $(A, \vec{y}, \vec{z})$) s'écrit :

$$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{\substack{M \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}}_{\text{modélisation spatiale}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} / & 0 \\ Y_{12} & / \\ Z_{12} & / \end{Bmatrix}_{\substack{M \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}}_{\text{modélisation plane de normale } \vec{x}}$$

La modélisation plane conduit à un torseur glisseur d'axe central $(A, \vec{x})$. L'action mécanique est donc modélisable par une force en tout point de cet axe. La trace de cet axe dans le plan d'étude est un point.

Exemple 2 : Cas d'une liaison sphère/plan (linéaire rectiligne)

Le torseur d'action mécanique d'une liaison linéaire rectiligne de droite de contact $(A, \overrightarrow{x})$ et de normale $\overrightarrow{z}$ dans le cadre d'une étude plane de normale $\overrightarrow{x}$ s'écrit :

$$\forall M \in \text{plan}\,(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) \qquad \{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array}\right\}_{M}^{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}}_{\text{modelisation spatiale}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{cc} / & 0 \\ 0 & / \\ Z_{12} & / \end{array}\right\}_{M}^{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}}_{\text{modelisation plane de normale}\overrightarrow{x}}$$

Avec l'hypothèse de modélisation plane des actions mécaniques, le torseur des actions mécaniques de la liaison linéaire rectiligne a la même forme que celui d'une liaison sphère-plan.

Remarque

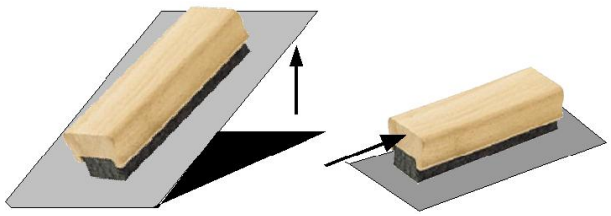
Seules trois formes de torseurs d'actions mécaniques sont utilisées en modélisation plane :

glissière direction y	articulation ou pivot plane (glisseur)	ponctuelle plane de normale $\overrightarrow{z}$
$\left\{\begin{array}{cc} / & L_{12} \\ 0 & / \\ Z_{12} & / \end{array}\right\}_{M,b}$	$\left\{\begin{array}{cc} / & 0 \\ Y_{12} & / \\ Z_{12} & / \end{array}\right\}_{M,b}$	$\left\{\begin{array}{cc} / & 0 \\ 0 & / \\ Z_{12} & / \end{array}\right\}_{M,b}$

7 Modélisation des actions de contact avec frottements

7.1 Mise en évidence

Dans la réalité, les liaisons sans frottement n'existent pas. Il est nécessaire d'imposer un effort pour déplacer une brosse qui est en appui-plan sur la table. De même, une brosse sur un plan incliné restera en position, jusqu'à un angle limite d'inclinaison.



7.2 Modèle de Coulomb

7.2.1 Définitions

Le modèle de Coulomb est basé sur des observations empiriques.

Définition *Modèle de Coulomb - Cas de non glissement en I*

Il y a adhérence ou roulement sans glissement (FIGURE 6a) : $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$

- limite sur l'action tangentielle : $\left\|\overrightarrow{T_{1\to 2}}\right\| \leq f \left\|\overrightarrow{N_{1\to 2}}\right\|$ avec $\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \overrightarrow{T_{1\to 2}} + \overrightarrow{N_{1\to 2}}$

Définition *Modèle de Coulomb - Cas du glissement en I*

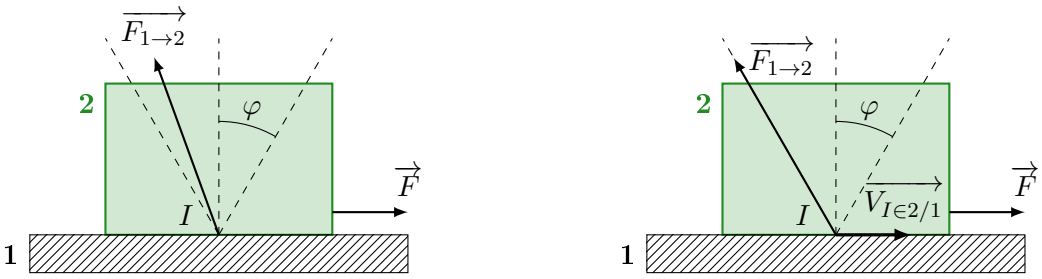
Glissement en I (FIGURE 6b) : $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}} \neq \overrightarrow{0}$

- action tangentielle : $\left\|\overrightarrow{T_{1\to 2}}\right\| = f\left\|\overrightarrow{N_{1\to 2}}\right\|$
- sens de l'action tangentielle : $\overrightarrow{T_{1\to 2}}$ de même direction et de sens opposé à $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}}$.

Le coefficient de frottement f (sans unité) est obtenu expérimentalement. Il dépend des matériaux en contact, de la qualité des surfaces et de la nature du contact.

7.2.2 Représentation graphique des lois de Coulomb : le cône de frottement

Les conditions de frottement peuvent se représenter graphiquement sous la forme d'une action tangentielle maximale proportionnelle à l'action normale, c'est-à-dire sous la forme d'une inclinaison maximale de la force transmise au contact par rapport à la normale. L'angle d'inclinaison maximal φ est tel que $f = \tan\varphi$.



(a) Phase d'adhérence (b) Phase de glissement

FIGURE 6 – Représentation graphique (plane) du cône de frottement.

En phase d'adhérence (figure 6a), la condition de Coulomb impose que l'action $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ soit « dans le cône de frottement » ou, à la limite du glissement, « sur le cône ».

En phase de glissement (figure 6b), la condition de Coulomb impose que l'action $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ soit « sur le cône » et la composante tangentielle $\overrightarrow{T_{1\to 2}}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le modèle de Coulomb interdit à l'action $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$ d'être hors du cône.

Ces représentations planes sont à interpréter en trois dimensions. Le secteur angulaire est alors effectivement un cône, de demi-angle au sommet φ (figure 7).

Remarque *Frottement statique et frottement cinétique*

Deux coefficients différents, selon qu'il y a adhérence (frottement statique) ou glissement (frottement cinétique), sont parfois utilisés. Il s'agit du **coefficient d'adhérence** f_s et du **coefficient de frottement** f_c.

Les 2 valeurs peuvent être très proches ou aller du simple au double, selon les couples de matériaux considérés. En revanche, on a toujours $f_s \geq f_c$.

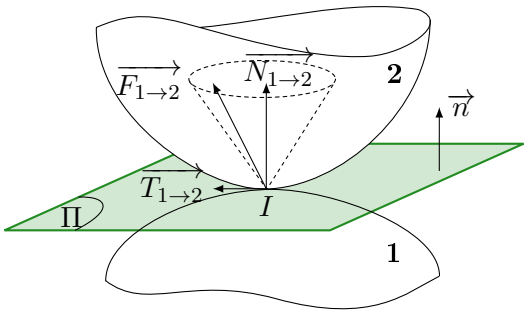


FIGURE 7 – Représentation 3D du cône de frottement.

Dans le cadre du modèle de Coulomb, la composante tangentielle n'est en aucun cas proportionnelle à la surface de contact. Les lois de Coulomb représentent le modèle le plus simple permettant de tenir compte du phénomène de frottement. Il est bien évident que la réalité est plus complexe. Ce coefficient dépend souvent de beaucoup d'autres paramètres tels que la température, la rugosité des surfaces, la vitesse de glissement, etc.

Il est intéressant de connaître quelques valeurs usuelles de coefficient de frottement pour des contacts classiques en mécanique.

Matériaux en contact	f
Acier/acier (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (lubrifié)	0,08
Acier/téflon	0,05
Lubrification hydrodynamique	0,005
Pneu/bitume sec	0,8
Pneu/bitume humide	0,6

TABLE 1 – Quelques valeurs de coefficients de frottement

Le bronze est un alliage de cuivre et d'étain (et de plomb lorsqu'il est utilisé pour réduire le frottement). Le laiton est un alliage de cuivre et de zinc. Ils présentent de bonnes propriétés de frottement face à l'acier (en terme d'usure et de grippage) et conduisent (évacuent) très bien la chaleur.

Le Téflon PTFE (polytétrafluoroéthylène) est un polymère possédant de très bonnes propriétés de frottement (coefficient faible).

7.3 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement

Soient $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{M_{NI,1\to2}} + \overrightarrow{M_{TI,1\to2}}$ le moment transmis.

On note $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_P \vec{n} + \overrightarrow{\Omega_R}$ où ω_P est la composante de *pivotement* et $\overrightarrow{\Omega_R}$ la composante de *roulement* ($\overrightarrow{\Omega_R} \in \Pi$).

Par extension des lois de Coulomb sur le frottement, les résistances au pivotement ou au roulement peuvent se modéliser sous la forme :

- Si $\omega_P = 0$, $|M_{N,1\to2}| \leq \delta N_{1\to2}$.
- Si $\omega_P \neq 0$, $|M_{N,1\to2}| = \delta N_{1\to2}$ et $M_{N,1\to2}$ de signe opposé à ω_P.
- Si $\overrightarrow{\Omega}_R = \overrightarrow{0}$, $\|\overrightarrow{M}_{T,1\to2}\| \leq \mu N_{1\to2}$.
- Si $\overrightarrow{\Omega}_R \neq \overrightarrow{0}$, $\|\overrightarrow{M}_{T,1\to2}\| = \mu N_{1\to2}$ et $\overrightarrow{M}_{T,1\to2}$ de signe opposé à $\overrightarrow{\Omega}_R$ et de même direction.

Les coefficients de résistances au pivotement δ et au roulement μ sont exprimés en m et sont obtenus expérimentalement.

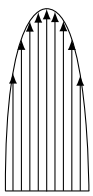
Matériaux en contact	$\boldsymbol{\delta}$
Acier sur acier (trains)	10^{-5} m
Pneu sur bitume (camions)	10^{-2} m

TABLE 2 – Quelques valeurs de coefficients de résistance au roulement

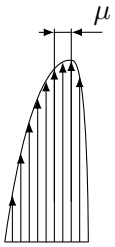
Exemple : Cas du pneu de voiture

À l'arrêt, la déformation symétrique du pneu conduit à une répartition de pression symétrique (FIGURE 8a) et une résultante des forces passant par l'axe de rotation de la roue.

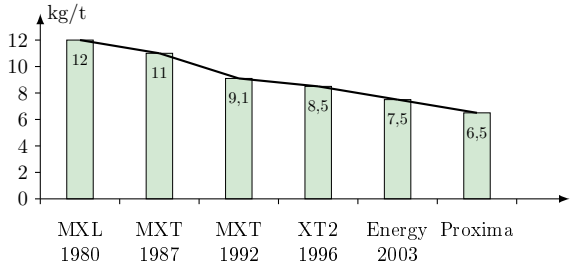
Lorsque le véhicule est en mouvement, la déformation élastique du pneu présente un hystérésis qui conduit à une répartition de pression non symétrique (FIGURE 8b) : la pression est plus forte à l'avant du pneu qu'à l'arrière. La résultante des forces passe à une distance μ de l'axe de rotation, ce qui crée une résistance au roulement.



(a) Véhicule à l'arrêt.



(b) Véhicule en mouvement.



(c) Véhicule en mouvement.

FIGURE 8 – (a) et (b) Répartition de pression pour une roue de voiture. (c) Évolution de la résistance au roulement au fil des améliorations technologiques, exprimé en kg (d'action tangentielle) par tonne (d'action normale) – source *Michelin*.