

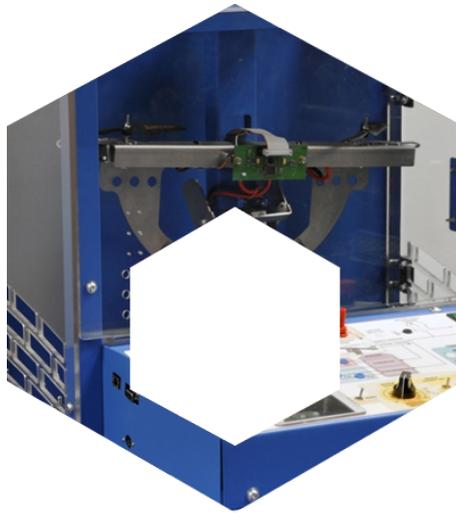
MODÉLISATION DES SLCI

Cours

CPGE

v1.21

Lycée La Fayette - 21 Bd Robert Schuman - 63000 Clermont-Ferrand - Académie de Clermont-Ferrand



Compétences visées:

- A3-03** Identifier la structure d'un système asservi: chaîne directe, capteur, commande, consigne, comparateur, correcteur
- A3-04** Identifier et positionner les perturbations
- A3-05** Différencier régulation et poursuite
- B1-01** Qualifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé
- B1-02** Identifier la nature des grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé
- B1-03** Décrire l'évolution des grandeurs
- B2-04** Déterminer les réponses temporelles et fréquentielles aux entrées de type signal canonique
- B2-05** Analyser ou établir le schéma-bloc du système
- C2-01** Prévoir la réponse temporelle à un échelon

Table des matières

1	Étapes de la modélisation des systèmes	3
1.1	Objectifs de la modélisation	3
1.2	Modélisation des entrées	4
2	Hypothèses : Systèmes Linéaires Continus Invariants	7
2.1	Rappel	7
2.2	Système Linéaire	7
2.3	Système Continu	9
2.4	Système invariant	10
3	Modélisation des SLCI	10
3.1	Systèmes modélisable par un gain pur	11
3.2	Systèmes modélisés par un intégrateur	12
3.3	Les systèmes du premier ordre	13
3.4	Les systèmes du deuxième ordre	18
3.5	Différentes modélisations d'un même système	24
3.6	Bilan	25
4	Annexe : réponse temporelle d'un système du second ordre	26
4.1	Cas $\xi > 1$: régime aperiodique	26
4.2	Cas $\xi = 1$: régime critique	27
4.3	Cas $\xi < 1$: régime pseudo-périodique	27
4.4	Synthèse	28

1 Étapes de la modélisation des systèmes

1.1 Objectifs de la modélisation

L'objectif principal de la modélisation est de permettre de prédire le comportement d'un système.

Pour cela, il est nécessaire de :

- proposer une modélisation des variables d'entrée (consignes, perturbations...)
- modéliser le système global
- simuler le comportement du système (à la main ou par ordinateur)
- analyser la réponse de la simulation du comportement du système (c'est à dire analyser l'évolution de la sortie du système).

Pour analyser correctement la réponse (l'évolution de la sortie) du système simulé, il faut :

- comparer les résultats obtenus à des résultats expérimentaux
- valider les performances obtenues par rapport aux exigences du cahier des charges (on rappelle que le cahier des charges contient les critères de performance du système).

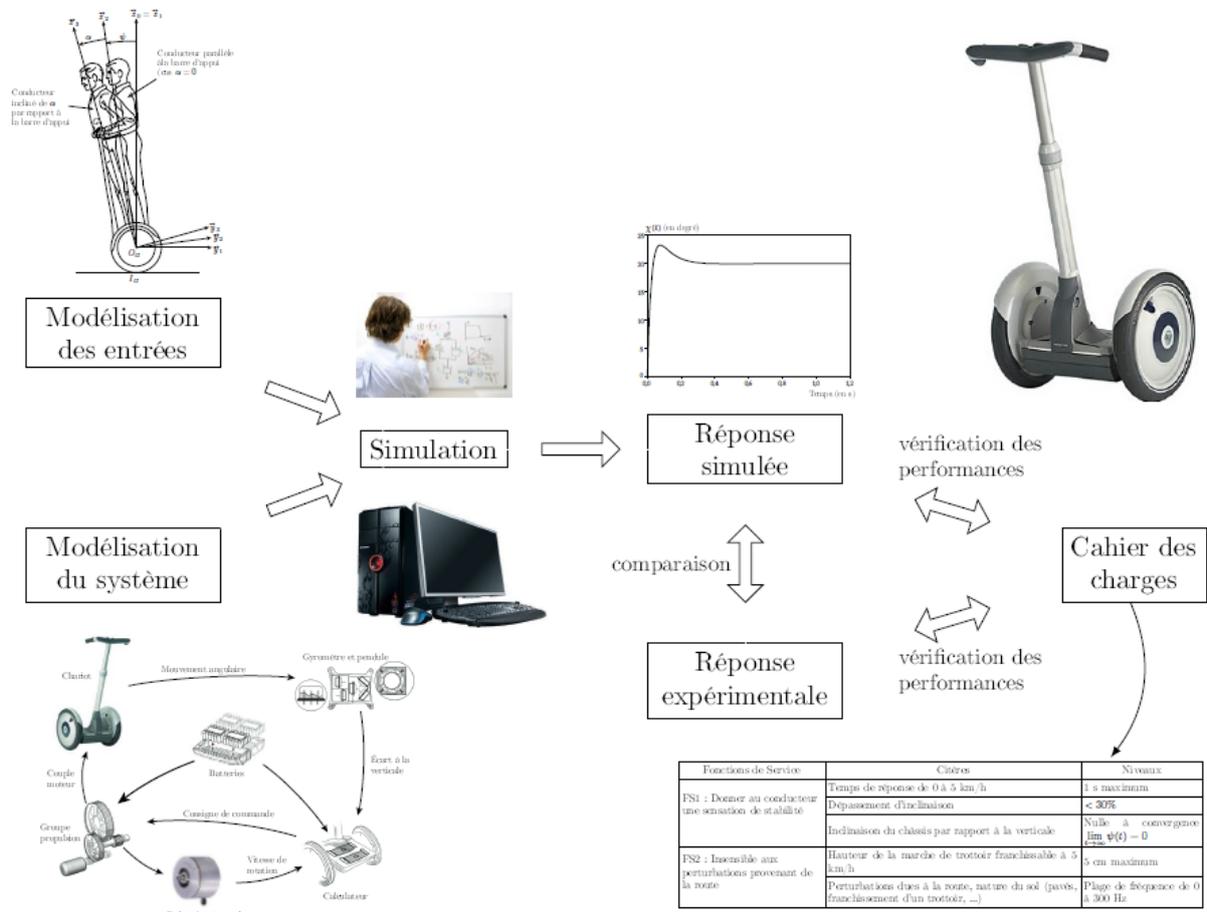


FIGURE 1 – Démarche de modélisation en Sciences de l'Ingénieur.

La démarche d'analyse est généralement itérative (voir FIGURE 1) : à partir des conclusions obtenues sur un premier modèle, celui-ci est corrigé ou amélioré progressivement et les résultats commencent à être exploitables après plusieurs itérations.

1.2 Modélisation des entrées

Pour étudier le comportement dynamique d'un système, il n'est pas toujours simple de traduire sous forme d'équations les lois de la physique qui régissent son comportement. Il est souvent plus efficace de le soumettre à des signaux tests et d'observer sa sortie.

De plus, la définition des critères de performances se fait majoritairement à partir de ces signaux.

On se propose ici de présenter les signaux les plus couramment utilisés.



Remarque

Pour les temps négatifs, les signaux seront toujours considérés à valeur nulle.

1.2.1 Impulsion de Dirac $\delta(t)$



Définition Impulsion de Dirac

Si $t \neq 0$, $\delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

La réponse temporelle à un dirac est appelée **réponse impulsionnelle**.

L'impulsion de Dirac (FIGURE 2) est une entrée qui modélise une excitation du système sur un temps extrêmement court, au regard du temps d'observation, mais suffisamment significatif pour que les effets puissent être observables.

Exemple : coup de marteau sur une plaque métallique, frappe piquée sur une corde de piano...

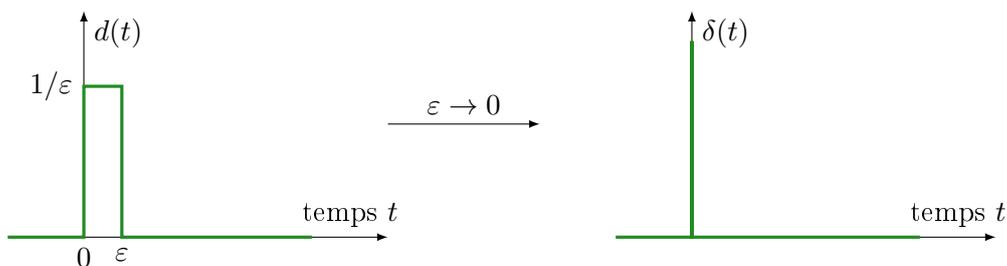


FIGURE 2 – Illustration de l'impulsion de Dirac.

Mathématiquement, l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution, définie comme nulle pour tout temps différent de zéro et telle que l'intégrale sur \mathbb{R} vaut 1. Son utilisation mathématique ne relève pas du programme de classes préparatoires et sera vu en détail en école d'ingénieurs ou en cursus L3.

L'impulsion de Dirac peut néanmoins être considérée comme la limite d'un créneau $d(t)$ de largeur ε et de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro.

1.2.2 Fonction échelon unité $u(t)$

 **Définition** *Fonction échelon unité* (FIGURE 3a)

$u(t)$: si $t < 0$, $u(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $u(t) = 1$.

La réponse temporelle à un échelon est appelée **réponse indicielle**.

Cette fonction respecte le principe de causalité, c'est-à-dire qu'elle est nulle pour les temps négatifs. En effet, l'ensemble des paramètres est supposé être au repos dans les temps négatifs.

Cette fonction modélise un signal qui passe de la valeur nulle à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constant égal à 1.

Exemple : fermeture d'un interrupteur électrique

 **Attention**

Ne pas confondre la notation $u(t)$ avec la notion de tension électrique !

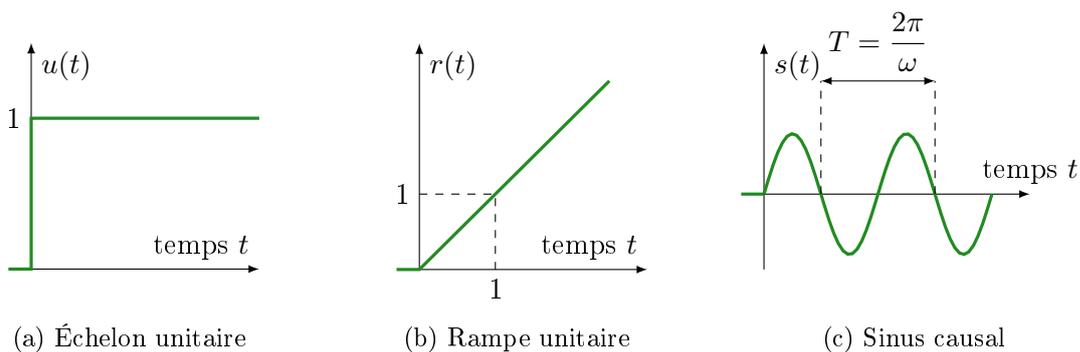


FIGURE 3 – Fonctions élémentaires

1.2.3 Fonction rampe unitaire $r(t)$

 **Définition** *Fonction rampe unitaire* $r(t)$ (FIGURE 3b)

Si $t < 0$, $r(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $r(t) = t$.

La fonction rampe peut s'exprimer à l'aide de la fonction échelon unitaire :

$$r(t) = t u(t)$$

Exemple : Cette fonction modélise par exemple un déplacement imposé à vitesse constante.

1.2.4 Fonction sinus causale $s(t)$

 **Définition** *Fonction sinus causale $s(t)$* (FIGURE 3c)

Si $t < 0$, $s(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $s(t) = \sin(\omega t)$.

Cette définition peut être simplifiée en utilisant la fonction échelon unitaire :

$$s(t) = \sin(\omega t)u(t)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelée **pulsation** du sinus et T **période**.



Remarque

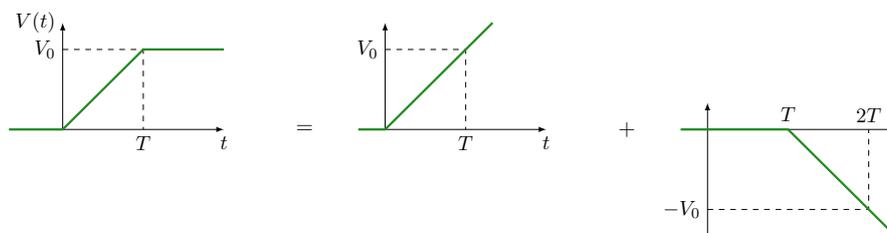
Toute fonction mathématique simple, nulle pour les temps négatifs, peut s'écrire à l'aide d'un échelon unitaire.

Cette fonction caractérise une consigne oscillant à une fréquence précise. Elle présente surtout un intérêt théorique, qui sera développé dans le chapitre d'analyse fréquentielle des SLCI.

1.2.5 Traitement des signaux composés de signaux élémentaires

Tout signal affine par morceaux peut s'écrire comme la somme de signaux élémentaires en utilisant des fonctions échelon et rampe, éventuellement retardées. Ces signaux composés sont souvent utilisés pour la commande des systèmes.

Exemple : consigne de vitesse de déplacement d'un ascenseur



Ce signal peut être décomposé en une somme de deux signaux élémentaires :

$$V(t) = \frac{V_0}{T}t u(t) - \frac{V_0}{T}(t - T) u(t - T)$$

où $u(t - T)$ est la fonction échelon retardée d'un temps T (la fonction passe à 1 à $t = T$).

Rappel

- L'équation d'une droite dans le plan est usuellement définie par : $y = ax + b$ avec a : coefficient directeur de la droite et b : ordonnée à l'origine

- Une expression plus intéressante (car adaptée à tous les cas) est celle utilisant les valeurs en deux points quelconques : $y = a(x - x_1) + y_1$ avec : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de deux points quelconques de la droite :

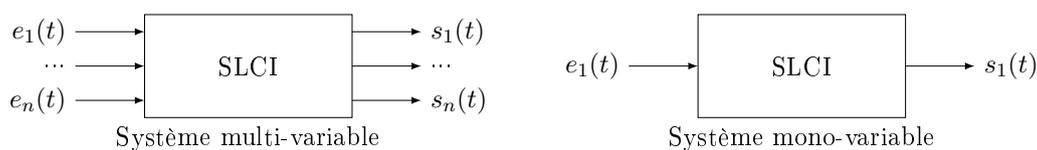
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \text{coefficient directeur de la droite}$$

2 Hypothèses : Systèmes Linéaires Continus Invariants

2.1 Rappel

On choisit de représenter un système ou sous-système sous la forme d'un bloc pour lequel les entrées (ou causes) du système sont situées à gauche et les sorties (effets) sont situées à droite. L'intérieur du bloc contient une description du système étudié en terme de comportement.

On ne s'intéresse ici qu'aux **systèmes mono-variables**, c'est à dire aux systèmes qui ne possèdent qu'une seule entrée et qu'une seule sortie.



Par la suite, nous verrons une méthode permettant d'étudier les systèmes **multi-variables** à partir des propriétés des SLCI. L'*AR-Drone* est un bon exemple de système multi-variables.

La commande se fait par les quatre moteurs du drone. Les différents mouvements possibles sont trois translations et trois rotations dans l'espace et ces différents mouvements élémentaires influent les uns sur les autres lors du pilotage par l'intermédiaire des moteurs. L'étude des systèmes multi-variables est abordée en école d'ingénieurs.



2.2 Système Linéaire



Définition *Système linéaire*

Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est elle-même linéaire. Cette fonction vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.

2.2.1 Principe de Proportionnalité



Définition *Principe de proportionnalité* (FIGURE 4)

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$, alors $\lambda s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda e(t)$.



FIGURE 4 – Principe de proportionnalité

2.2.2 Principe de Superposition



Définition *Principe de Superposition* (FIGURE 5)

Si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les réponses respectives des entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t) + s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t) + e_2(t)$.

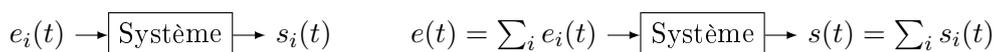


FIGURE 5 – Principe de superposition

En étudiant les réponses du système pour des entrées simples (comme les signaux tests), et en utilisant les propriétés de linéarité (proportionnalité et superposition), il est alors possible d'obtenir la réponse du système à des signaux plus complexes.



Remarque

- En relevant la valeur asymptotique de la sortie (régime établi ou permanent) pour différentes entrées échelon, on peut obtenir la **caractéristique** du système : sortie=f(entrée). Dans le cas d'un système linéaire, cette courbe est une droite de pente K appelé **gain du système**.
- La réponse d'un système linéaire en régime établi est de même nature que l'entrée.

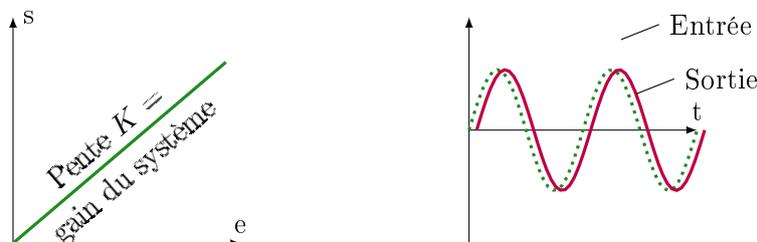


FIGURE 6 – Caractéristique linéaire

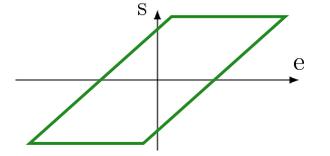


Attention

Ne pas confondre la caractéristique d'un système $s = f(e)$ avec la courbe $s(t)$ qui représente l'évolution temporelle de la sortie et qui est très souvent non-linéaire.

2.2.3 Non-linéarités

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'utilisation. Ci-après, quelques exemples de non-linéarités couramment rencontrés avec leur courbe caractéristique $S = f(E)$ associée.

	Saturation	Seuil	Hystérésis
Courbe caractéristique			
Exemple	Butée mécanique, alimentation, moteur électrique...	Frottement dans un moteur	Jeux mécaniques, matériaux (élastomères), cycles magnétiques,

Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de « linéariser » la réponse du système dans cette zone (FIGURE 7) autour d'un point de fonctionnement de la caractéristique entrée/sortie. Il s'agit souvent en pratique d'une approximation par la tangente au point de fonctionnement, appelée « linéaire tangente ». Le **système** est alors dit **linéarisé**.



FIGURE 7 – Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point

2.3 Système Continu



Définition *Système Continu*

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations de ses grandeurs physiques sont définies à chaque instant (elles sont caractérisées par des fonctions continues). On parle aussi de systèmes analogiques.

La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée, le plus souvent, par des systèmes informatiques ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets.

Lorsqu'un signal continu est numérisé pour être traité par un micro-contrôleur il subit deux discrétisations :

- Un échantillonnage en temps (FIGURE 8b) : la valeur du signal est prélevée tous les pas de temps (elle est considérée comme constante au cours du pas de temps par le système de commande).
- Une quantification : la mesure est mémorisée de façon discrète dans le contrôleur. L'intervalle de mesure est décomposé en N pas de mesure, la valeur retenue étant le pas le plus proche de la valeur mesurée (FIGURE 8c).

Très souvent, la période d'échantillonnage est très inférieure au temps de réponse du système ($5 \mu\text{s}$ pour l'échantillonnage contre quelques millisecondes pour le processus), si bien qu'il est alors possible d'assimiler le comportement à celui d'un système continu.

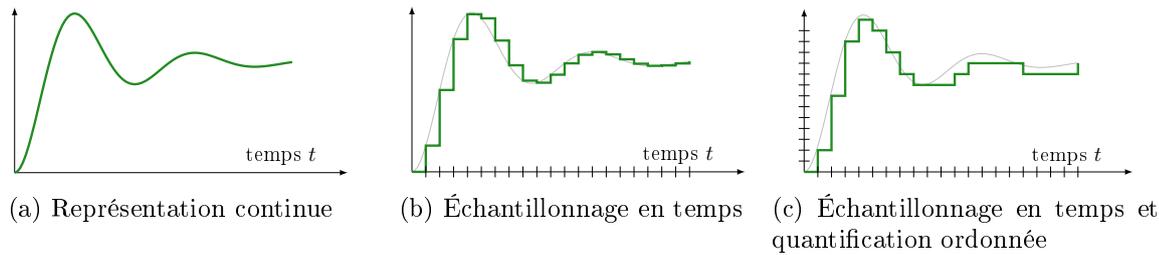


FIGURE 8 – Représentation numérique des données

2.4 Système invariant



Définition *Système invariant*

Un système invariant est un système dont le comportement est indépendant du temps.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et $t_2 = t_1 + \tau$), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques (voir FIGURE 9).

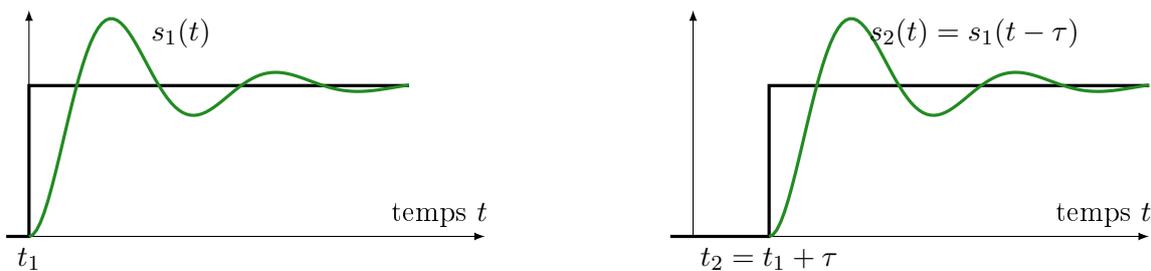


FIGURE 9 – Invariance dans le temps du comportement d'un système.

3 Modélisation des SLCI

Pour les systèmes automatisés réels, on se ramène au cas des SLCI en faisant des hypothèses simplificatrices. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées et d'affiner celui-ci si nécessaire.

Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire de déterminer **une équation reliant l'entrée $e(t)$ (ou les entrées) et la sortie $s(t)$** . Dans tout ce paragraphe, l'entrée e et la sortie s sont quelconques : elles peuvent être des tensions, des vitesses, des positions, des forces. Elles ne sont pas non plus nécessairement de même dimension.



Définition

Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement d'un système peut se mettre sous la forme d'une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.

Pour obtenir cette équation deux types de modélisation sont envisageables :

- Un **modèle de connaissance** établi à partir de lois physiques permet d'aboutir généralement à une telle équation. L'équation obtenue peut être plus ou moins complexe en fonction du système. Cette modélisation est analytique et possède un sens physique fort.
- À l'inverse, à partir d'un résultat expérimental sur une partie du système, il est possible de proposer un modèle simple dit **modèle de comportement** d'un constituant qui sera ensuite utilisé dans le modèle global du système. C'est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une boîte noire. Le comportement réel de ce sous-système est identifié au mieux à partir de résultats expérimentaux.

L'objectif de la partie qui suit est d'étudier plusieurs modèles très fréquemment rencontrés et d'en découvrir les caractéristiques. Ces modèles simples pourront ainsi être employés comme modèles de comportement.

3.1 Systèmes modélisable par un gain pur

La grande majorité des systèmes peuvent être modélisés par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie :

$$s(t) = Ke(t)$$

La constante de proportionnalité est alors appelée **le gain du système**.



Remarque

Dans ce type de système, l'entrée et la sortie peuvent être inversées, il n'y a pas de notion de causalité.

On peut ainsi modéliser par une constante la majorité des composants (FIGURE 10) :

- ceux qui transmettent l'énergie sans changer sa nature : les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou...),
- les composants qui distribuent l'énergie : préactionneurs (variateur),
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique...).



FIGURE 10 – Exemples de systèmes modélisables par un gain pur

Exemple : Gain d'un ressort

La relation reliant la force exercée sur le ressort $F(t)$ (sortie) à l'allongement Δx (entrée) est donnée par la relation : $F = k\Delta x$ où k est la raideur du ressort.

Ainsi le gain K du système est alors égal à k .

Exemple : Gain d'un réducteur de vitesse à engrenages

On cherche à déterminer le rapport entre les vitesses angulaires (en $\text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$ ou $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) des roues dentées ou la relation $\omega_2(t) = K\omega_1(t)$. La petite roue possède Z_1 dents (10 dents sur l'image) et la grande roue en possède Z_2 (30 dents).

On observe sur la figure que la petite roue tourne plus vite que la grande roue. Ainsi lorsque la petite roue tourne d'un tour, elle pousse Z_1 dents de la grande roue qui ne tourne alors que de Z_1/Z_2 tour. Le rapport de réduction entre les rotations est donc de Z_1/Z_2 .



On a alors (au signe près) pour les vitesses de rotation : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$

Le gain K du système est alors égal à Z_1/Z_2 .

3.2 Systèmes modélisés par un intégrateur

Une relation fondamentale lors de la modélisation des systèmes mécaniques est la relation permettant de passer de la vitesse $v(t)$ à la position $x(t)$ (ou de l'accélération $a(t)$ à la vitesse $v(t)$) :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Ainsi la position $x(t)$ est donnée par la relation : $x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$

La FIGURE 11 donne la réponse temporelle à une entrée en échelon et en rampe. En supposant que les conditions initiales sont nulles, quand la vitesse est constante, la position est une droite et quand la vitesse est une droite, la position est une parabole. On notera que pour $t \leq 0$, la position est nulle.

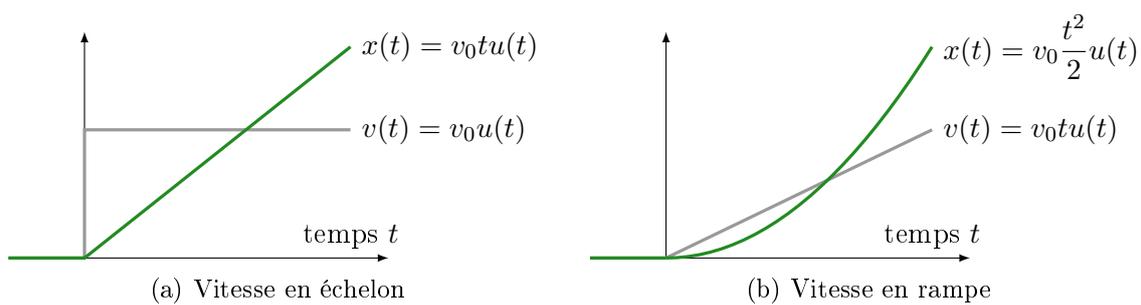
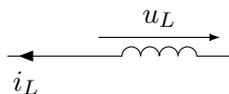


FIGURE 11 – Réponse temporelle de la position pour une entrée en vitesse donnée

Exemple : d'autres systèmes sont représentables par un intégrateur :

- relation entre le courant et la tension dans une bobine : $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ (avec L l'inductance de la bobine).



- relation entre la température et la puissance fournie par un radiateur dans une pièce sans perte : $C \frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t)$ (avec C la capacité thermique de la pièce, avec $P_{recue}(t) = \frac{U(t)^2}{R}$ où U est la tension d'alimentation du radiateur, R la résistance du radiateur).



Remarque

Même si on parle de relation intégrale, on utilise souvent la forme dérivée entre les paramètres afin de faire apparaître des équations différentielles.

3.3 Les systèmes du premier ordre

3.3.1 Forme de l'équation différentielle



Définition Équation différentielle d'un 1^{er} ordre

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

avec :

- τ la constante de temps du système (unité : seconde)
- K le gain du système (unité : $[s]/[e]$).

Exemple : Sous-marin à ballast

Pour s'immerger ou remonter à la surface, les sous-marins utilisent des ballasts qui peuvent être plus ou moins remplis d'eau ou d'air. La poussée d'Archimède est alors modifiée et permet de ne plus s'opposer au poids du sous-marin et ainsi gérer le déplacement vertical du sous-marin.

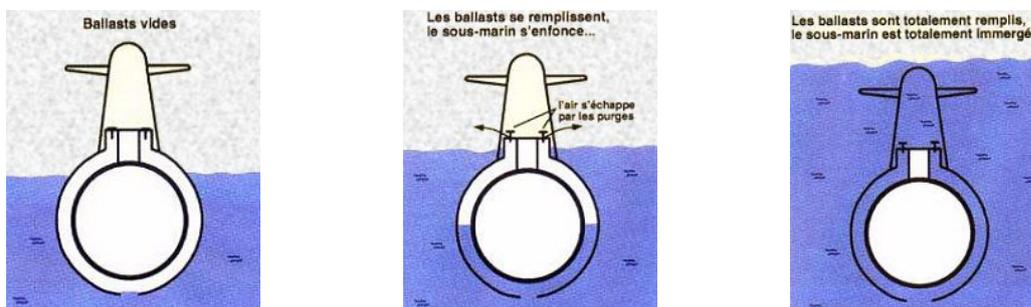


FIGURE 12 – Principe d'immersion d'un sous-marin à ballast

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au sous-marin soumis à la poussée d'Archimède, à la pesanteur et aux frottements visqueux de l'eau s'écrit :

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -fv(t) + Pa(t) - mg$$

On pose $P(t) = Pa(t) - mg$ la force permettant de gérer la vitesse verticale du sous-marin. On obtient alors une équation différentielle du premier ordre entre l'entrée $P(t)$ et la sortie $v(t)$:

$$\frac{m}{f} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{P(t)}{f}$$

Nous pouvons ainsi définir la constante de temps du système $\tau = \frac{m}{f}$ et le gain $K = \frac{1}{f}$.

Exemple : Chauffage d'une pièce

Le comportement d'une pièce chauffée dont les murs sont mal isolés peut être décrit par les équations suivantes :

- équation de la chaleur du système pièce : $C \frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - P_{perdue}(t)$
- puissance fournie par le radiateur : $P_{recue}(t) = \frac{U(t)^2}{R}$
- pertes de puissance à travers les murs : $P_{perdue}(t) = h(T(t) - T_{ext}(t))$

En combinant ces équations pour ne faire apparaître que la température de la pièce T et les grandeurs externes au système (température extérieure T_{ext} et puissance reçue dépendant de la tension de commande des radiateurs $U(t)$), on obtient la relation :

$$C \frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - h(T(t) - T_{ext}(t))$$

soit :

$$C \frac{dT(t)}{dt} + hT(t) = P_{recue}(t) + hT_{ext}(t)$$

Ainsi on trouve également une équation différentielle du premier ordre, de constante de temps $\tau = C/h$. Sachant qu'il y a deux entrées et que l'équation est linéaire, on étudiera par superposition la réponse à l'entrée $U(t)$ d'une part puis à l'entrée T_{ext} d'autre part.

3.3.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0u(t)$)

La résolution de l'équation différentielle est habituellement obtenue en sommant :

- une solution particulière $s_p(t)$ qui caractérise le comportement du système pendant le régime permanent ou établi et qui est de la même forme que l'entrée du système ;
- une solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) $s_g(t)$ qui correspond au comportement du système pendant le régime transitoire.

Ainsi : $s(t) = s_p(t) + s_g(t)$

Résolution :

1. **Solution de l'équation homogène** $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$.

Intuition : On cherche des solutions de la forme $s_g(t) = Ae^{rt}u(t)$.

En injectant cette solution dans l'équation différentielle homogène, on constate que, pour avoir des solutions non nulles, les coefficients r doivent vérifier une équation appelée **équation caractéristique** : $\tau r + 1 = 0$.

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est : $P(r) = \tau r + 1$.

La racine de ce polynôme est $r_1 = -\frac{1}{\tau}$.

La solution de l'équation homogène est donc : $s_g = Ae^{r_1 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$ avec $A \in \mathbb{R}$.



Remarque

On ajoute l'échelon $u(t)$ à la fin de l'équation de manière à avoir une solution nulle pour les temps négatifs.

2. Solution particulière

On cherche s_p sous la même forme que le second membre, c'est-à-dire, $s_p(t) = Bu(t)$.

On injecte cette solution dans l'équation différentielle : $0 + Bu(t) = Ke_0 u(t)$

D'où $s_p = Ke_0 u(t)$



Remarque

La dérivée de l'échelon est nulle car l'échelon est constant par morceaux.

3. Solution générale

La solution de l'équation différentielle est donc $s(t) = \left(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Ke_0 \right) u(t)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

4. Détermination de la constante A .

On suppose que la sortie est nulle à $t = 0^+$, ainsi on a $s(0^+) = 0 = A + Ke_0$ d'où $A = -Ke_0$.



Définition Réponse indicielle

La réponse temporelle à une entrée en échelon (réponse indicielle) d'un système du 1^{er} ordre est donc :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

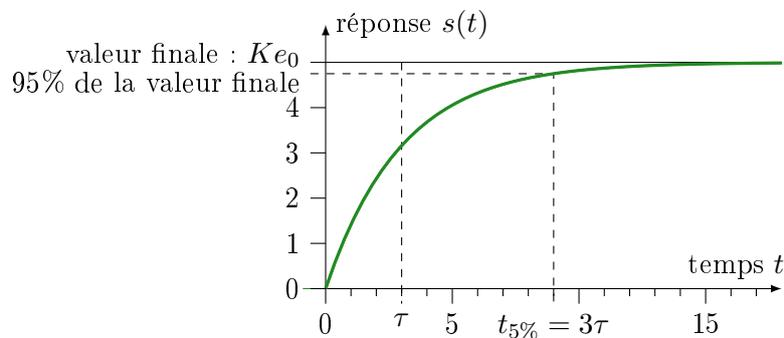
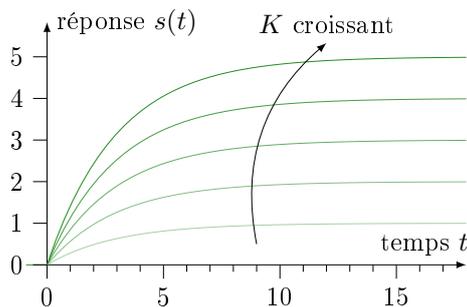


FIGURE 13 – Réponse temporelle d'un système du premier ordre.

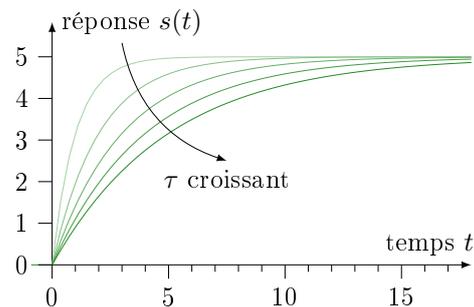


Propriété *Tracé et propriétés remarquables* (FIGURE 13 et FIGURE 14)

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = Ke_0$
- Pour $t = \tau$, la réponse atteint **63%** de sa valeur finale car $s(\tau) = Ke_0(1 - e^{-1}) = 0,63s_\infty$
- Pour $t = 3\tau$, $s(3\tau) \approx 0,95s_\infty$, on a donc $t_{5\%} = 3\tau$.
- La réponse indicielle ne présente pas d'oscillations. En effet, $s'(t) = \frac{Ke_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) > 0$, $\forall t$ donc $s(t)$ est strictement croissante.
- La **pente de la tangente à l'origine est non nulle** et vaut $s'(0) = \frac{Ke_0}{\tau}$
- Plus τ est élevée, plus le système est **lent** (voir FIGURE 14).



(a) Influence du gain K : $K = 1, 2, 3, 4, 5$ et $\tau = 3$ s



(b) Influence de la constante de temps τ : $K = 5$ et $\tau = 1, 2, 3, 4, 5$ s

FIGURE 14 – Influence des paramètres du modèle du 1^{er} ordre sur la réponse indicielle

3.3.3 Identification de modèle

L'identification de modèle consiste à proposer un modèle théorique à partir de la réponse d'un système à une entrée type, mesurée expérimentalement. Le modèle obtenu est appelé *modèle de comportement* puisqu'il traduit le comportement observé en sortie, sans se préoccuper du fonctionnement interne.

Cette démarche s'oppose à la démarche d'analyse, consistant à détailler et modéliser le fonctionnement interne afin d'en déduire un modèle global, appelé alors « modèle de connaissance », puisqu'il est le fruit de la compréhension du fonctionnement interne du système.

Dans le cadre des systèmes asservis, l'entrée type la plus communément utilisée est l'échelon. Si la réponse mesurée présente les caractéristiques de la réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre (allure à décroissance exponentielle, pente initiale non nulle, pas d'oscillations hors éventuel bruit de mesure et convergence vers une valeur constante), alors il est raisonnable de modéliser le comportement de ce système par une équation différentielle du 1^{er} ordre.



Propriété *Identification des paramètres caractéristiques*

Les paramètres caractéristiques K et τ sont identifiés sur la courbe mesurée :

- K : par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0 , sachant que e_0 est connu.
- τ : trois méthodes sont disponibles suivant la qualité de la courbe :
 - ◊ le temps où la courbe atteint 63 % de la valeur finale vaut τ ;

- ◇ le temps où la courbe atteint 95 % de la valeur finale vaut 3τ ;
- ◇ la tangente à l'origine coupe l'asymptote Ke_0 en $t = \tau$. Cette méthode n'est en général pas conseillée car peu précise.

Exemple : Axe de robot

Soit la courbe de réponse en boucle ouverte mesurée d'un axe de robot (FIGURE 15). La tension de consigne est un échelon d'amplitude 21 V. La courbe suivante indique la mesure de la vitesse de rotation du moteur obtenue, en rad.s^{-1} .

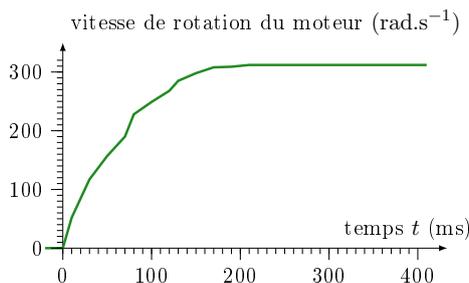


FIGURE 15 – Courbe de réponse en boucle ouverte pour l'axe de robot

La réponse du moteur présente les caractéristiques suivantes :

- la pente de la tangente à l'origine est non nulle ;
- la courbe converge vers une valeur constante ;
- il n'y a pas d'oscillations.

Elle peut donc raisonnablement être assimilée à la réponse d'un système du premier ordre de constante de temps τ_m et de gain K_m .

La valeur finale mesurée sur la courbe est de 310 rad.s^{-1} . La consigne étant de 21 V, le gain du moteur est $K_m = \frac{310}{21} = 14,8 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$.

L'instant où la courbe atteint 63 % de la valeur finale donne une estimation de la constante de temps : $63 \% \times 310 = 195 \text{ rad.s}^{-1}$. Sur la courbe, le temps pour lequel la réponse atteint 195 rad.s^{-1} est : $\tau_m = 70 \text{ ms}$ (figure 16a).

Le point d'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote, ou le temps de réponse à 5 % conduisent à des valeurs de τ relativement proches (respectivement 60 ms et $\frac{150 \text{ ms}}{3} = 50 \text{ ms}$) mais différentes car la courbe expérimentale ne correspond pas exactement à la réponse théorique d'un premier ordre. Le choix d'une valeur moyenne de $\tau = 60 \text{ ms}$ est raisonnable.

En conclusion, la réponse théorique du moteur à une entrée en échelon est décrit par l'équation

$$s(t) = K_m e_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right] u(t)$$

avec $e_0 = 21$, $K_m = 14,8 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et $\tau_m = 60 \text{ ms}$.

Le tracé de la réponse théorique est superposé à la mesure expérimentale FIGURE 16b.

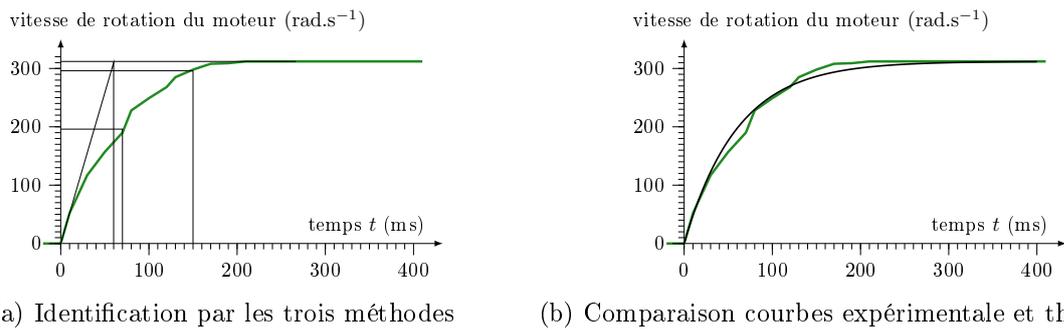


FIGURE 16 – Identification d'un modèle de comportement de type premier ordre

3.4 Les systèmes du deuxième ordre

Le modèle du second ordre est couramment rencontré. Il est aussi utilisé pour améliorer les modèles du premier ordre (prise en compte de frottements visqueux par exemple...)

3.4.1 Équation différentielle



Définition Équation différentielle d'un 2^e ordre

Un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du 2^e ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 2^e ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

avec :

- K le gain statique du système (unité : $[s]/[e]$);
- ω_0 la pulsation propre non amortie¹ (unité : rad.s^{-1});
- ξ le facteur d'amortissement² (sans unité).

¹ Aussi appelée pulsation naturelle, parfois notée ω_n . ω_0 est positive.

² Beaucoup de notations cohabitent pour décrire l'amortissement : ζ , ξ , ε , z ou m . Le choix dépend du contexte disciplinaire et vise avant tout à éviter la confusion avec une autre grandeur qui pourrait avoir la même notation. ξ est positif.

Exemple : mouvement d'une roue par rapport au châssis

On s'intéresse ici au mouvement d'une roue par rapport au châssis d'un quad. Cette roue est reliée au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et d'un ressort montés en parallèle. Ce système peut être modélisé par une masse (modèle du véhicule) reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle. On note $f(t)$ la force exercée sur la masse m et $y(t)$ la position de cette masse par rapport à la position d'équilibre.

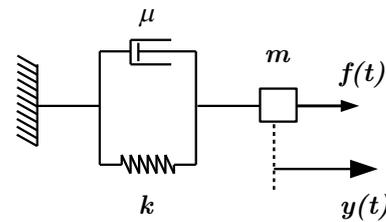


FIGURE 17 – Double amortisseurs de quad

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (2^e loi de Newton) sur la masse m soumise à l'action du ressort ($-ky(t)$), de l'amortisseur ($-\mu\dot{y}(t)$) et à la force $f(t)$, on obtient l'équation :

$$m\ddot{y}(t) + \mu\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$$

En posant $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}$, $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{\mu}{k}$ et $K = \frac{1}{k}$, l'équation correspond à celle d'un système du second ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = Kf(t)$$

3.4.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0u(t)$)

Pour résoudre le problème, on applique la même démarche que pour l'équation du premier ordre. On recherche une solution particulière et les solutions de l'équation homogène.

1. Solution particulière

On cherche s_p sous la même forme que celle du second membre, c'est-à-dire, $s_p(t) = Bu(t)$.

On injecte cette solution dans l'équation différentielle : $0 + 0 + Bu(t) = Ku(t)$

D'où $s_p = Ke_0u(t)$

2. Solution de l'équation homogène $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{s}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0}\dot{s}(t) + s(t) = 0$

En choisissant des solutions sous la forme $s_g(t) = Ae^{rt}u(t)$, on montre que le polynôme caractéristique associé à cette équation est : $P(r) = \frac{1}{\omega_0^2}r^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}r + 1$.

En fonction des valeurs de $\xi \geq 0$, les racines de ce polynôme sont réelles ou complexes (le discriminant vaut $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$). Trois cas sont donc possibles :

- amortissement faible $\xi < 1$: deux pôles complexes conjugués ;
- amortissement critique $\xi = 1$: un pôle réel double ;
- amortissement fort $\xi > 1$: deux pôles réels distincts.

Comme précédemment, on fait l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles : $s(0^+) = 0$ et $\dot{s}(0^+) = 0$. Ainsi, dans tous les cas :

- La pente à l'origine (tangente à l'origine) est nulle (c'est une caractéristique de la réponse indicielle d'un système d'ordre supérieur à 1).
- La valeur asymptotique est égale à $s_\infty = Ke_0$ (comme pour un premier ordre)

Cas $\xi > 1$: régime aperiodique

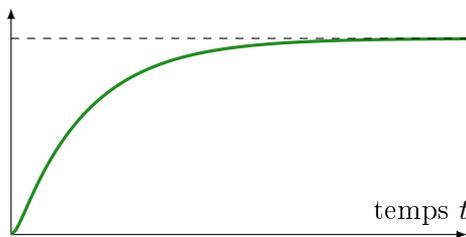
Le discriminant est positif. En posant $T_1 = \frac{1}{\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$ et $T_2 = \frac{1}{\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$, on montre (cf. 4) qu'avec des conditions initiales nulles, la solution complète de l'équation différentielle est :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right) \right] u(t)$$

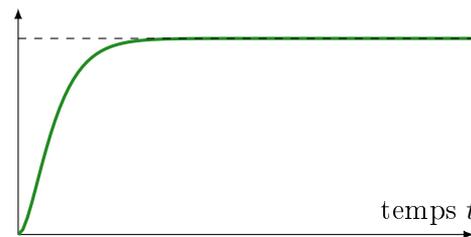


Propriété Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 18a)

- la sortie tend vers la valeur finale Ke_0 ;
- la pente de la tangente à l'origine est **nulle** (par hypothèse $\dot{s}(0) = 0$) ;
- il n'y a **pas de dépassement**, le système est amorti. On parle de régime aperiodique (en effet $\dot{s}(t) > 0$, à montrer en exercice) ;
- si $|T_2| \gg |T_1|$, on peut alors assimiler la courbe du système à celle d'un premier ordre de constante de temps $\tau = T_2$ (avec un retard égal à T_1)
- plus ξ est **proche de 1**, plus le système est **rapide**.



(a) Régime aperiodique $\xi = 2$ et $\omega_0 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$



(b) Régime critique : $\xi = 1$ et $\omega_0 = 4 \text{ rad.s}^{-1}$

FIGURE 18 – Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre de fort amortissement et d'amortissement au régime critique ($\xi = 1$)

Cas $\xi = 1$: régime critique

Le polynôme caractéristique possède une racine réelle double : $r_1 = -\omega_0$.

La solution complète est $s(t) = Ke_0 [1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}] u(t)$.



Propriété Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 18b)

Les propriétés sont identiques à celles du régime aperiodique, le régime critique étant le cas limite quand $\xi \rightarrow 1$.

Cas $\xi < 1$: régime pseudo-périodique

Le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjugués. On montre que :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left(\cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t) \right) \right] u(t)$$

En posant $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ ou bien $\sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2}$ et $\cos(\varphi) = \xi$, la relation devient :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi\right) \right] u(t)$$

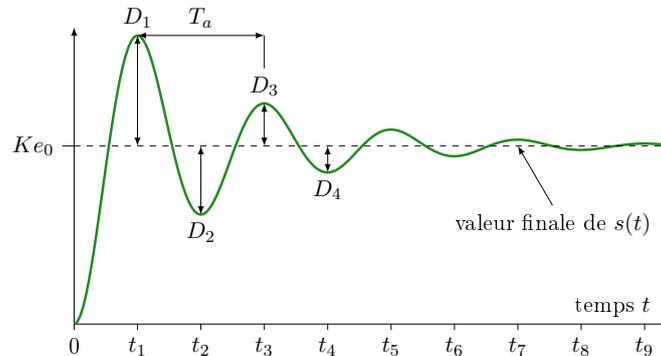


FIGURE 19 – Réponse indicielle pour un système du deuxième ordre de faible amortissement.



Propriété Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 19)

- la réponse est **oscillante** (présence des termes en cos et sin, le système est sous amorti. On parle de régime pseudo-périodique. On note :
 - ◊ $\omega_a = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ la pseudo-pulsation,
 - ◊ $T_a = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$ la pseudo-période
- les dépassements (voir FIGURE 19) sont caractérisés par :
 - ◊ le temps du k^e dépassement : $t_k = \frac{k\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$
 - ◊ le k^e dépassement relatif $D_k^{\%} = \left| \frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)} \right| = e^{\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$. À l'aide de cette formule, on peut construire l'abaque de la FIGURE 21b. On constate que les dépassements ne dépendent que de ξ .
- il n'y a pas de formule générale pour le temps de réponse à 5 %, il faut le déterminer numériquement. Un abaque adimensionné est donné sur la FIGURE 21a.
- **le système le plus rapide est obtenu pour un amortissement $\xi = 0,69$.** Pour cette valeur, le premier dépassement en pourcentage vaut $D_1^{\%} \approx 0,05$.

La FIGURE 20 montre l'influence de l'amortissement et de la pulsation propre en fixant les autres paramètres.

3.4.3 Identification de modèle

Dans la même démarche de modélisation comportementale que celle développée pour un premier ordre, si la réponse mesurée expérimentalement présente une tangente à l'origine nulle et des dépassements, le modèle du premier ordre ne peut plus convenir et il devient raisonnable de modéliser le comportement du système par une fonction de transfert du 2^e ordre.

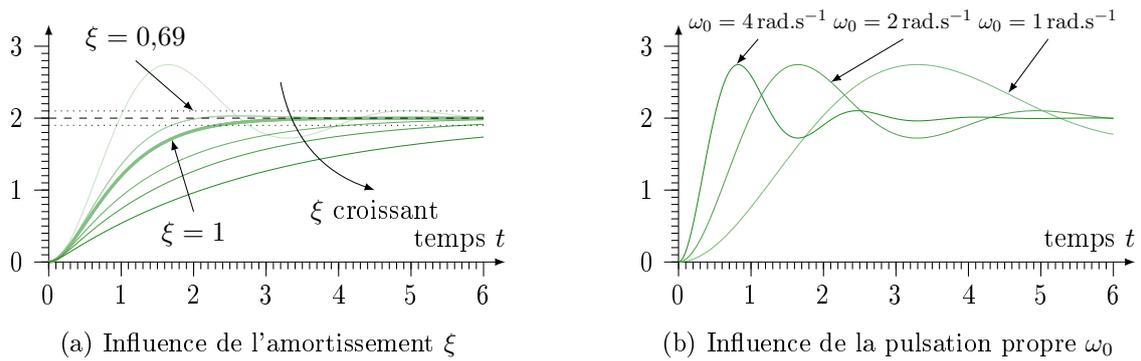


FIGURE 20 – Influence des paramètres caractéristiques d'un système du deuxième ordre d'une réponse indicielle ($e_0 = 1$)

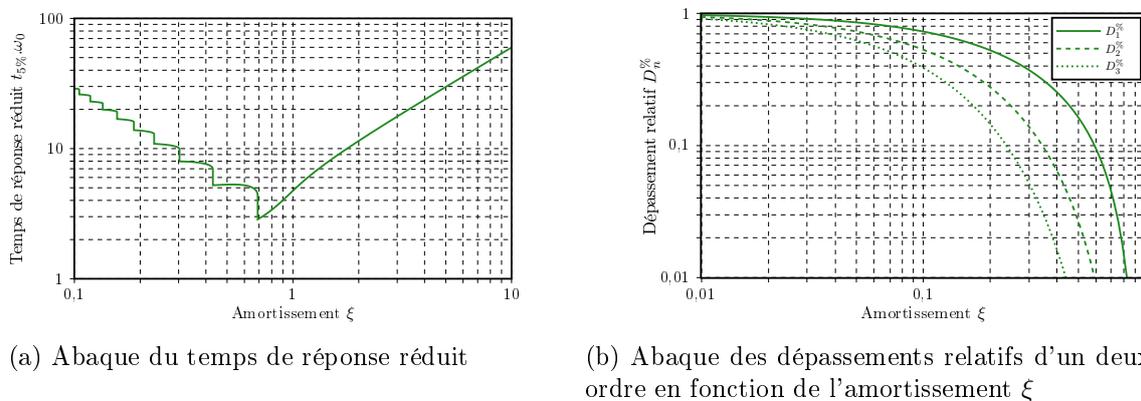


FIGURE 21 – Abaques du temps de réponse réduit (en ordonnée $T_{reduit} = t_{5\%}\omega_0$) et des dépassements relatifs.



Propriété Identification des paramètres caractéristiques

Les paramètres caractéristiques K , ξ et ω_0 sont identifiés sur la courbe mesurée :

- K : par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0 , sachant que e_0 est connu.
- ξ par les **dépassements en pourcentage**, grâce à l'abaque des dépassements FIGURE 21b ou

$$\text{la relation } \xi = \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{\ln^2 D_k^{\%}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$



Propriété Identification des paramètres caractéristiques (suite)

- ω_0 de plusieurs manières possibles :
 - ◇ par le temps de réponse à 5 % en utilisant l'abaque FIGURE 21a ;
 - ◇ par l'instant du premier dépassement, en utilisant l'expression $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - \xi^2}}$ (avec $k = 1$)
 - ◇ par mesure de la pseudo-période et utilisation de l'expression $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$

Exemple : Bras de robot

Soit la courbe de réponse en boucle ouverte mesurée sur un axe linéaire asservi en position. La consigne est un échelon d'amplitude 5 mm. La courbe suivante montre le déplacement de l'axe en mm en fonction du temps.

La courbe de réponse du bras de robot présente les caractéristiques suivantes :

- la pente de la tangente à l'origine est nulle ;
- la courbe converge vers une valeur constante ;
- il y a des oscillations.

Elle peut donc raisonnablement être assimilée à la réponse d'un système du deuxième ordre en régime pseudo-périodique. Le comportement global de l'axe linéaire peut donc être modélisé par une équation différentielle du second ordre de gain K_r , de pulsation propre ω_r et d'amortissement ξ_r .

La valeur finale mesurée sur la courbe est de 5 mm. La consigne étant de 5 mm, le gain du robot est $K_r = \frac{5}{5} = 1$ (FIGURE 22a).

Le premier dépassement atteint la valeur 7,3, soit en pourcentage $(7,3 - 5)/5 = 46\%$. La courbe des dépassements relatifs (FIGURE 21b) permet de lire que l'amortissement $\xi_r = 0,25$. Le second dépassement est 3,58, soit $(5 - 3,58)/5 = 28,4\%$. L'amortissement vaut alors $\xi_r = 0,21$. L'amortissement vaut en moyenne $\xi_r = 0,23$.

Le temps de réponse à 5 % est de 350 ms. L'abaque du temps de réponse réduit (FIGURE 21a) permet de lire que le temps de réponse réduit $t_{5\%} \cdot \omega_r = 10$, soit $\omega_r = 28,6 \text{ rad.s}^{-1}$. Le temps du premier dépassement est 135 ms, donc $\omega_r = 28,6 \text{ rad.s}^{-1}$. Le temps du second dépassement est 255 ms, donc $\omega_r = 25,3 \text{ rad.s}^{-1}$. La pulsation propre vaut en moyenne $\omega_r = 26 \text{ rad.s}^{-1}$.

En conclusion, le robot est modélisable par une équation différentielle d'ordre 2 de gain $K_r = 1$, de pulsation propre $\omega_r = 26 \text{ rad.s}^{-1}$ et d'amortissement $\xi_r = 0,23$.

Le tracé de la réponse théorique est superposé à la mesure expérimentale FIGURE 22b.

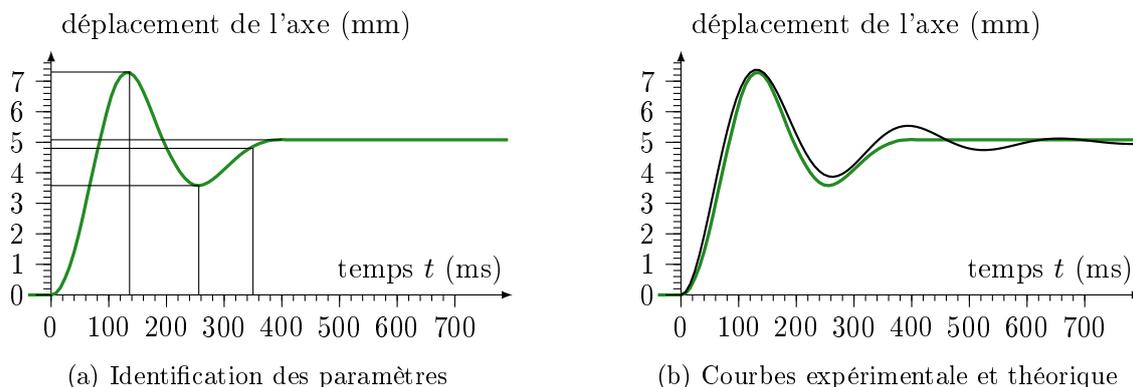


FIGURE 22 – Identification d'un modèle de comportement de type deuxième ordre

3.5 Différentes modélisations d'un même système

Le moteur à courant continu est un exemple de composant pour lequel différentes modélisations peuvent être adoptées en fonction de la finesse nécessaire. Étant donné que ce constituant est la base de tous les principes de motorisation et que la très grande majorité des systèmes automatisés utilisent des moteurs, il est important de détailler son principe et sa modélisation.

3.5.1 Description d'une machine à courant continu

Une machine à courant continu est un convertisseur électro-mécanique composée généralement d'aimants permanents sur le stator (puissance faible) ou d'un inducteur bobiné (forte puissance) et d'un bobinage au rotor soumis à une tension continue (figure 23). Un collecteur à balais permet d'alimenter une partie du bobinage du rotor de façon à ce que la force de Laplace exercée sur les conducteurs impose un couple moteur sur le rotor (action mécanique ayant tendance à faire tourner le rotor).

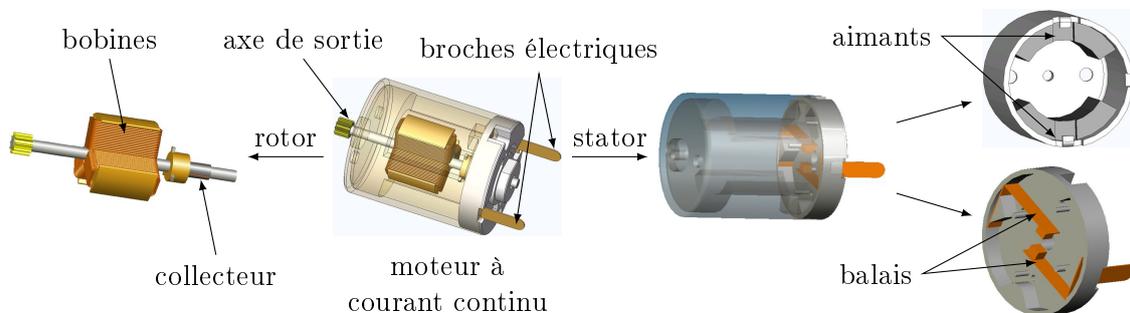


FIGURE 23 – Schéma de principe de l'architecture d'une machine à courant continu.

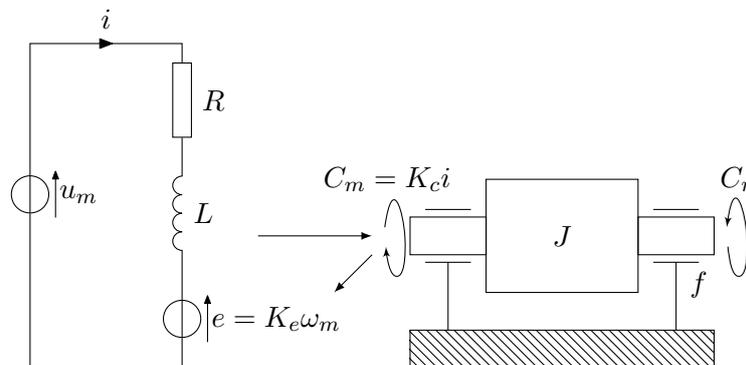


FIGURE 24 – Modélisation électrique et mécanique d'une machine à courant continu.

La machine à courant continu est le siège de phénomènes électriques, magnétiques et mécaniques, représentés FIGURE 24. La modélisation des phénomènes conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} u_m(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E(t) & \text{Loi des mailles} \\ J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\omega_m(t) & \text{Principe fondamental de la dynamique} \\ e(t) = K_e \omega_m(t) & \text{Couplage électro-magnétique} \\ C_m(t) = K_c i(t) & \text{Couplage électro-magnétique} \end{cases}$$

où R est la résistance du bobinage d'induit, L est l'inductance du bobinage d'induit, U_m est la tension aux bornes de la machine à courant continu, i est l'intensité du courant absorbé par la machine, E est la force contre-électromotrice due à la rotation, J est l'inertie mécanique à vaincre par la machine, f est le frottement visqueux, C_m est le couple électro-magnétique exercé par le stator sur le rotor, C_r est le couple résistant en sortie, ω_m est la vitesse angulaire de rotation, et K_e et K_c sont les constantes de couplage électro-magnétique ($K_c = K_e$ généralement).

3.5.2 Modélisations

- Si L est négligée (ce qui revient à dire que l'établissement du régime permanent dans le circuit électrique est bien plus rapide que l'établissement du régime permanent mécanique), on obtient, en combinant les équations ensemble :

$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{R}{k} \left(J \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) \quad (\text{Équa. diff. d'ordre 1})$$

- Si L n'est pas négligée, on obtient la relation suivante :

$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{R}{k} \left(J \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) + \frac{L}{k} \left(J \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} \right) \quad (\text{Équa. diff. d'ordre 2})$$

- D'autre part, si l'on souhaite obtenir l'angle de rotation θ_m en sortie du moteur telle que $\omega_m = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$, on obtient :

$$u_m(t) = k \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \frac{R}{k} \left(J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} \right) + \frac{L}{k} \left(J \frac{d^3\theta_m(t)}{dt^3} \right) \quad (\text{Équa. diff. d'ordre 3})$$

On constate que l'ordre de l'équation différentielle d'un système dépend du choix de l'entrée et de la sortie mais également de la finesse de la modélisation adoptée. Tout n'est que question de compromis, c'est la comparaison entre le modèle et des résultats expérimentaux qui validera les choix adoptés.

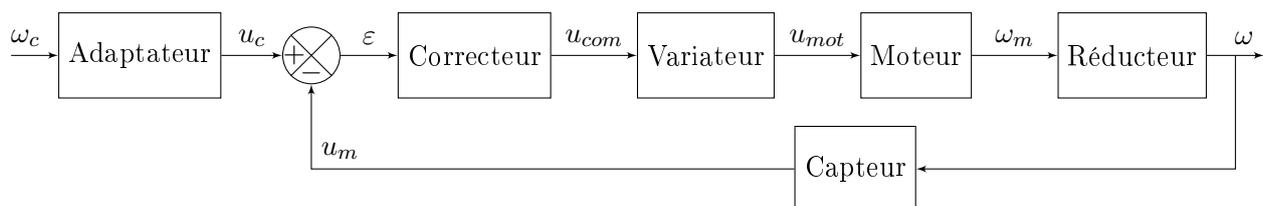
3.6 Bilan

3.6.1 Modélisation d'un système complexe

On constate qu'il est relativement simple de modéliser chaque constituant par une équation différentielle. Si un système complexe peut être décomposé en sous-systèmes modélisables par des équations différentielles, il suffira de combiner ces équations pour obtenir une équation globale caractérisant le comportement du système complexe.

Exemple : Asservissement de vitesse d'un bras robotisé

L'asservissement étudié dans le chapitre précédent est décrit par le schéma-bloc suivant :



Le moteur est modélisé par une équation différentielle du premier ordre de constante de temps τ_m et de gain K_m : $\tau_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_{mot}(t)$

Les correcteur, variateur, réducteur, capteur et adaptateur sont modélisés respectivement par des gains purs C , K_v , K_r , K_c et K_c .

On a donc : $\omega(t) = K_r \omega_m(t)$ soit $\tau_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_m K_r u_{mot}(t)$

Or $u_{mot}(t) = K_v u_{com}(t) = K_v C \varepsilon(t) = K_v C (u_c(t) - u_m(t)) = K_v C K_c (\omega_c(t) - \omega(t))$

Ainsi $\tau_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_m K_r K_v C K_c (\omega_c(t) - \omega(t))$

L'équation différentielle globale régissant l'asservissement est :

$$\tau_m \frac{d\omega(t)}{dt} + (1 + K_m K_r K_v C K_c) \omega(t) = K_m K_r K_v C K_c \omega_c(t)$$

Sous sa forme canonique :

$$\frac{\tau_m}{1 + K_m K_r K_v C K_c} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{K_m K_r K_v C K_c}{1 + K_m K_r K_v C K_c} \omega_c(t)$$

On retrouve une équation différentielle du premier ordre. Connaissant la réponse d'un système du premier ordre à une consigne en échelon, on pourra en déduire le comportement de l'asservissement de vitesse du bras si on demande en consigne un échelon de vitesse.

3.6.2 Améliorations

L'outil informatique de type schéma-bloc acausal permet de complexifier les modèles utilisés (augmentation du nombre de paramètres, du nombre d'équations, prise en compte des non-linéarités,...). C'est l'ordinateur qui combine et résout les équations.

Dans une logique de conception, il est nécessaire de traiter différemment ces équations différentielles, notamment pour pouvoir spécifier plus facilement la commande d'un système automatisé.

Plusieurs outils sont disponibles, dont notamment :

- la transformation de Laplace, qui sera utilisée dans le prochain chapitre,
- la représentation d'état, qui sera vue en école d'ingénieur.

4 Annexe : réponse temporelle d'un système du second ordre

4.1 Cas $\xi > 1$: régime aperiodique

Le polynôme caractéristique possède deux racines réelles : $r_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ et $r_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

La solution générale est donc de la forme $s_g(t) = Ae^{r_1 t} u(t) + Be^{r_2 t} u(t)$.

La solution complète est de la forme $s(t) = (Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + Ke_0) u(t)$.

Sous des conditions initiales nulles, c'est-à-dire que $s(0^+) = 0$ et $\dot{s}(0^+) = 0$, on doit résoudre un système à deux équations :
$$\begin{cases} A + B + Ke_0 = 0 \\ Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } A = \frac{Ke_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \times \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \text{ et } B = \frac{Ke_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \times \frac{1}{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

$$\text{Finalement, } s(t) = Ke_0 \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \right] u(t).$$

En posant $T_1 = \frac{1}{\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$ et $T_2 = \frac{1}{\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$, on retombe sur les résultats du cours.

4.2 Cas $\xi = 1$: régime critique

Le polynôme caractéristique possède une racine réelle double : $r_1 = -\omega_0$.

La solution générale est donc de la forme $s_g(t) = (At + B)e^{r_1 t}u(t)$.

La solution complète est de la forme $s(t) = ((At + B)e^{r_1 t}u(t) + Ke_0)u(t)$.

On suppose également que les CI sont nulles. Cela donne deux équations :
$$\begin{cases} B + Ke_0 = 0 \\ Br_1 + A = 0 \end{cases}$$

D'où $A = -Ke_0\omega_0$, $B = -Ke_0$ et finalement : $s(t) = Ke_0 [1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}]u(t)$.

4.3 Cas $\xi < 1$: régime pseudo-périodique

Le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjugués : $r_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0 j\sqrt{1 - \xi^2}$ et $r_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0 j\sqrt{1 - \xi^2}$.

La solution générale est donc de la forme $s_g(t) = Ae^{r_1 t}u(t) + Be^{r_2 t}u(t)$.

La solution complète est de la forme $s(t) = (Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + Ke_0)u(t)$.

Sous les conditions initiales nulles, on doit résoudre :
$$\begin{cases} A + B + Ke_0 = 0 \\ Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$A = \frac{Ke_0}{2j\sqrt{1 - \xi^2}} \times \frac{1}{\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{Ke_0(-j\xi - \sqrt{1 - \xi^2})}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \text{ et } B = \frac{Ke_0}{2j\sqrt{1 - \xi^2}} \times \frac{1}{-\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{Ke_0(j\xi - \sqrt{1 - \xi^2})}{2\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Finalement :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \left((-j\xi - \sqrt{1 - \xi^2})e^{-(\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})t} + (j\xi - \sqrt{1 - \xi^2})e^{-(\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})t} \right) \right] u(t)$$

En développant les exponentielles et en regroupant les parties imaginaires et réelles, on obtient :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 + e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{j\xi}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \left(e^{j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t} - e^{-j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t} + e^{-j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t} \right) \right) \right] u(t)$$

En transformant le terme j en $-1/j$, on observe les formes exponentielles d'un cosinus et d'un sinus :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left(\cos(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t) \right) \right] u(t).$$

4.4 Synthèse

La FIGURE 25 rappelle quelques expressions utiles (généralement données dans les sujets de concours).

Temps du k^e dépassement	$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
Amplitude du k^e dépassement	$D_k = Ke_0 e^{-\frac{\xi k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
Amortissement en fonction de D_k	$\xi = \left(1 + \frac{k^2 \cdot \pi^2}{\ln^2 D_k}\right)^{-\frac{1}{2}}$
Pulsation propre en fonction de t_k	$\omega_0 = \frac{k\pi}{t_k\sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-pulsation	$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
Pseudo-période	$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

FIGURE 25 – Propriétés remarquables de la réponse indicielle d'un second ordre.