



# ANALYSE DES PERFORMANCES DES SLCI

Cours

CPGE

v1.41

*Lycée La Fayette - 21 Bd Robert Schuman - 63000 Clermont-Ferrand - Académie de Clermont-Ferrand*



## Compétences visées:

- A3-03** Identifier la structure d'un système asservi: chaîne directe, capteur, commande, consigne, comparateur, correcteur
- B2-04** Déterminer les réponses temporelles et fréquentielles aux entrées de type signal canonique
- B2-05** Analyser ou établir le schéma-bloc du système
- B2-08** Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement
- C2-01** Prévoir la réponse temporelle à un échelon
- C2-05** Relier la stabilité aux caractéristiques fréquentielles
- C2-06** Prévoir les performances en termes de rapidité

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Un outil : la transformée de Laplace</b>	<b>4</b>
1.1	Définition . . . . .	4
1.2	Propriété essentielle . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Notion de fonction de transfert</b>	<b>6</b>
2.1	Définition et obtention de la fonction de transfert . . . . .	6
2.2	Quelques exemples . . . . .	8
2.2.1	Système du premier ordre . . . . .	8
2.2.2	Système du second ordre . . . . .	8
2.2.3	Fonction de transfert du moteur à courant continu . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Représentation par schéma-blocs et fonction de transfert globale d'un système complexe</b>	<b>9</b>
3.1	Modélisation par schéma-blocs . . . . .	9
3.2	Association de blocs en série . . . . .	10
3.3	Différentes fonctions de transfert . . . . .	11
3.3.1	Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé . . . . .	11
3.3.2	Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé . . . . .	12
3.4	Retour sur l'exemple du bras de robot . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Détermination des performances</b>	<b>14</b>
4.1	Retour dans le domaine temporel . . . . .	14
4.2	Détermination pratique des performances dans le domaine de Laplace . . . . .	15
4.2.1	Stabilité . . . . .	15
4.2.2	Rapidité . . . . .	17
4.2.3	Précision . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>18</b>
5.1	Complément au calcul de fonction de transfert . . . . .	18
5.1.1	Manipulation des schéma-blocs . . . . .	18
5.1.2	Déplacer un bloc avant ou après un sommateur . . . . .	19
5.1.3	Déplacer un bloc avant ou après une jonction . . . . .	19
5.1.4	Inversion de sommateurs ou de jonctions . . . . .	20
5.1.5	Blocs en parallèle . . . . .	20
5.1.6	Application . . . . .	21

---

5.2	Transformée de Laplace . . . . .	22
5.2.1	Propriétés . . . . .	23
5.2.2	Tableaux des transformées de Laplace usuelles . . . . .	27
5.3	Décomposition en éléments simples . . . . .	27

L'écriture sous forme d'équations différentielles des SLCI n'est pas très bien adaptée aux études qui nous intéressent (choix de correcteur, détermination rapide des performances...). L'outil privilégié pour traiter un SLCI de manière efficace est la transformation de Laplace qui permet d'obtenir simplement une relation algébrique entre la sortie et l'entrée du système.

## 1 Un outil : la transformée de Laplace

La **transformée de Laplace** est une application mathématique permettant d'exprimer une fonction temporelle dans un domaine virtuel, le **domaine de Laplace**, où la manipulation des expressions sera bien plus simple.

### 1.1 Définition

L'annexe page 22 présente quelques aspects théoriques sur la transformée de Laplace mais pour les besoins de l'analyse des systèmes, très peu de propriétés sont à retenir. Il s'agit donc en priorité de savoir utiliser l'outil tel qu'indiqué par la suite, afin de modéliser les systèmes. Un approfondissement de l'annexe n'est pas indispensable dans le cadre du programme Sciences de l'Ingénieur.



#### Définition *Transformée de Laplace*

Soit  $f$  une fonction de la variable  $t$  (le temps) définie sur  $\mathbb{R}$ .

Sous réserve d'existence, on note  $F(p)$  la transformée de Laplace  $\mathcal{L}[f(t)]$  de la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

avec  $p$  une variable complexe, appelée **variable de Laplace**.

$p$  est une variable tout à fait symbolique puisqu'elle ne prendra aucune valeur pour application numérique.

Ces fonctions  $f$  représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse... Dans les cas rencontrés en ingénierie, les conditions d'existence de la transformée sont toujours réunies.

On note la transformation inverse  $\mathcal{L}^{-1} : f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ .



#### Remarque *Notation*

Dans les pays anglo-saxons, la variable de Laplace est souvent notée  $s$ , pour *symbolic variable*. Les logiciels de simulation Scilab et Matlab utilisent cette notation.



#### Remarque *Convention d'écriture*

Par habitude, et quand cela est possible, une lettre minuscule sera utilisée pour noter le signal dans le domaine temporel, et la lettre majuscule pour noter la transformée de Laplace de ce signal. Cependant, si dans un énoncé, la grandeur temporelle est déjà en majuscule, on confondra les deux écritures, il faudra toutefois bien veiller à préciser la variable associée au domaine d'étude ( $C(t)$  pour le domaine temporel et  $C(p)$  pour le domaine de Laplace).

**Exemple :** Transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude  $e_0$  causal

On applique la définition pour déterminer la transformée de Laplace de  $e(t) = e_0 u(t)$ .

$$E(p) = \int_{0^-}^{\infty} e_0 u(t) e^{-pt} dt = e_0 \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{e_0}{p}$$



### Définition Conditions de Heaviside

une fonction du temps  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie :  $f(0^-) = 0$ ,  $\dot{f}(0^-) = 0$ ,  $\ddot{f}(0^-) = 0 \dots$  c'est à dire si les **conditions initiales sont nulles** et le système au repos pour  $t < 0$ .



### Propriété Transformées de Laplace de signaux usuels à connaître

	$x(t)$	$X(p)$
	Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
	Échelon d'amplitude $A$ : $A u(t)$	$\frac{A}{p}$
	Rampe de pente $b$ : $bt u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

## 1.2 Propriété essentielle

La transformée de Laplace prend tout son intérêt lorsqu'il s'agit de manipuler des équations différentielles, car elle présente une propriété intéressante sur l'opérateur de dérivation, sous réserve de conditions initiales nulles (démontrée dans le paragraphe 5.2.1 page 23) :



### Propriété Dérivation

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = p\mathcal{L}[f(t)] = pF(p) \quad \text{si } f(0^-) = 0$$

Dans les conditions de Heaviside, **dériver** dans le domaine temporel revient à **multiplier** par  $p$  dans le domaine de Laplace.

Au passage dans le domaine de Laplace, la dérivée est transformée par une multiplication par  $p$ . De même, une dérivée seconde sera transformée en une multiplication par  $p^2$  et ainsi de suite.

Cette propriété permet, sous les conditions de Heaviside et compte-tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, de transformer une équation différentielle sous la forme :

$$a_0s(t) + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_2\frac{d^2s(t)}{dt^2} = b_0e(t) + b_1\frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} (a_0 + a_1p + a_2p^2)S(p) = (b_0 + b_1p)E(p)$$

Les systèmes complexes sont composés de plusieurs blocs dont les comportements sont modélisés par des équations différentielles. La transformée de Laplace permet ainsi de combiner efficacement les équations sous forme polynomiale.

**Exemple :** Transformation de Laplace d'une équation différentielle à coefficients constants

On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle obtenue pour le moteur à courant continu du chapitre précédent :

$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{RJ}{k} \left( \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) + \frac{LJ}{k} \left( \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} \right)$$

Dans le domaine de Laplace, on obtient pour chaque terme de l'équation :

- $\mathcal{L}[u_m(t)] = U_m(p)$
- $\mathcal{L}\left[\frac{RJ}{k} \frac{d\omega_m(t)}{dt}\right] = \frac{RJ}{k} p\Omega_m(p)$
- $\mathcal{L}[k\omega_m(t)] = k\Omega_m(p)$
- $\mathcal{L}\left[\frac{LJ}{k} \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}\right] = d\frac{JL}{k} p^2\Omega_m(p)$

En regroupant les termes :  $U_m(p) = \left( k + \frac{RJ}{k}p + \frac{JL}{k}p^2 \right) \Omega_m(p)$

## 2 Notion de fonction de transfert

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le modèle mathématique (ou modèle dynamique) d'un système monovariante (SISO), linéaire, continu et invariant peut être décrit par une équation différentielle linéaire (avec  $a_i$  et  $b_i$  coefficients constants appartenant à  $\mathbb{R}$ ) :

$$a_0s(t) + a_1\frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n\frac{d^ns(t)}{dt^n} = b_0e(t) + b_1\frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m\frac{d^me(t)}{dt^m}$$



### Remarque Causalité

Il faut que  $m \leq n$  pour que le système soit physiquement réalisable. On parle de causalité. Les transformations de Laplace permettent de travailler aisément avec ce type d'équation.

### 2.1 Définition et obtention de la fonction de transfert

On se place dans les conditions de Heaviside. Le niveau initial du système importe peu, c'est sa réaction à une excitation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier. On peut donc toujours se ramener à des conditions initiales nulles moyennant un changement d'origine.

La transformée de Laplace d'une équation différentielle en temps consiste à exprimer l'équation différentielle sous forme polynomiale dans le domaine de Laplace, où un facteur  $p^i$  traduit une dérivée  $i^{\text{ème}}$  de la variable.

Après transformation de Laplace, l'équation précédente devient :

$$(a_0 + a_1p + \dots + a_np^n)S(p) = (b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m)E(p)$$



### Définition Fonction de transfert

La **fonction de transfert** ou **transmittance** est la fonction  $H(p)$ , définie par le rapport de la sortie sur l'entrée, toutes deux exprimées dans le domaine symbolique de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$H(p)$  représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée. Connaissant  $E(p)$  (signal d'entrée donné!) et  $H(p)$  intrinsèque au système étudié, il est simple de déterminer  $S(p)$  car  $S(p) = H(p)E(p)$ . On remarque que la relation entre l'entrée et la sortie dans le domaine de Laplace est bien linéaire.

Le schéma-bloc figure 1 définit une représentation graphique du modèle mathématique du système dans le domaine de Laplace.

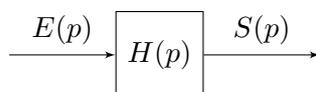


FIGURE 1 – Schéma-bloc dans le domaine de Laplace.

$H(p)$  s'écrit toujours sous la forme d'un quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + \dots + a_np^n}$$

On appelle alors **pôles** les racines du dénominateur et **zéros** les racines du numérateur. Nous aurons l'occasion d'utiliser les pôles pour l'étude de la stabilité.



### Définition Forme canonique

La forme canonique d'une fonction de transfert consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1'p + \dots + b_{m'}p^{m'}}{1 + a_1'p + \dots + a_{n'}p^{n'}}$$

avec  $K$  le gain (amplification) statique de la fonction de transfert,  $\alpha$  la classe du système et  $n = n' + \alpha$  l'ordre du système.

Cette forme est fondamentale et permet de nombreuses analyses pratiques (analyses temporelle, fréquentielle, dimensionnelle, de performances).

## 2.2 Quelques exemples

### 2.2.1 Système du premier ordre

Le système est régi par l'équation différentielle :  $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$  avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc  $(\tau p + 1)S(p) = KE(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



**Définition** *Forme canonique de la fonction de transfert d'un premier ordre*

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec  $\tau$  la constante de temps et  $K$  le gain (amplification) statique.

### 2.2.2 Système du second ordre

Le système est régi par l'équation différentielle  $\ddot{s}(t) + 2\xi\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$  avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc  $(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)S(p) = K\omega_0^2 E(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$



**Définition** *Forme canonique de la fonction de transfert d'un second ordre*

La fonction de transfert d'un système du second ordre est sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec  $\omega_0$  la pulsation propre du système non amorti,  $\xi$  le coefficient (facteur) d'amortissement et  $K$  le gain (amplification) statique.

### 2.2.3 Fonction de transfert du moteur à courant continu

Reprenons l'équation qui caractérise le moteur :

$$u_m(t) = k\omega_m(t) + \frac{RJ}{k} \left( \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) + \frac{LJ}{k} \left( \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} \right)$$

La fonction de transfert est :  $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k + \frac{RJ}{k}p + \frac{JL}{k}p^2}$

Sous forme canonique, on obtient :  $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{RJ}{k^2}p + \frac{JL}{k^2}p^2}$

Par analyse dimensionnelle (on peut remarquer que  $p$  a pour dimension l'inverse d'un temps), on peut poser  $\tau_m = \frac{RJ}{k^2}$  et  $\tau_e = \frac{L}{R}$ , on a alors  $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \tau_m p + \tau_m \tau_e p^2}$

Si on cherche la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Theta_m(p)}{U_m(p)}$ , ( $\theta$  est la position angulaire et on a la relation  $\omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t)$ ) on obtient :  $H(p) = \frac{\Theta_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{p(1 + \tau_m p + \tau_m \tau_e p^2)}$

L'ordre de cette fonction de transfert est de **3** et la classe est **1**.

### 3 Représentation par schéma-blocs et fonction de transfert globale d'un système complexe

#### 3.1 Modélisation par schéma-blocs

Nous avons vu qu'un système complexe pouvait être décrit par un schéma-blocs fonctionnel dans lequel les noms des constituants apparaissent dans des blocs.

Maintenant, nous savons calculer la fonction de transfert de chacun des blocs et nous pouvons construire un schéma-blocs en remplaçant le nom des composants par leur fonction de transfert.



#### Remarque

Pour un système donné, il existe un unique schéma-blocs fonctionnel, par contre il est possible de faire autant de schéma-blocs que l'on souhaite étant donné que les blocs représentent des équations et peuvent donc être manipulés comme on veut.

**Exemple :** description de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot

Une consigne de vitesse angulaire de rotation  $\omega_c$  [rad.s<sup>-1</sup>] est adaptée à l'aide d'un adaptateur de gain  $K_a$  en une tension de consigne  $u_c$  [V]. Cette tension de consigne est comparée à la tension  $u_m$  [V] délivrée par le capteur de type génératrice tachymétrique de gain  $K_t$ , proportionnelle à la vitesse angulaire réelle  $\omega$  [rad.s<sup>-1</sup>].

L'écart de tension  $\varepsilon$  [V] est corrigé par un correcteur, représenté par sa fonction de transfert  $C(p) = C$ , qui fournit la tension de commande  $u_{com}$  [V] au variateur de gain  $K_v$  pilotant le moteur par une tension  $u_{mot}$  [V].

Le moteur, dont la fonction de transfert est notée  $H_{mot}(p)$  transforme cette tension en vitesse de rotation  $\omega_{mot}$  [rad.s<sup>-1</sup>], puis cette vitesse est réduite par un réducteur de gain  $K_r$  pour obtenir la vitesse angulaire de sortie  $\omega$  [rad.s<sup>-1</sup>].

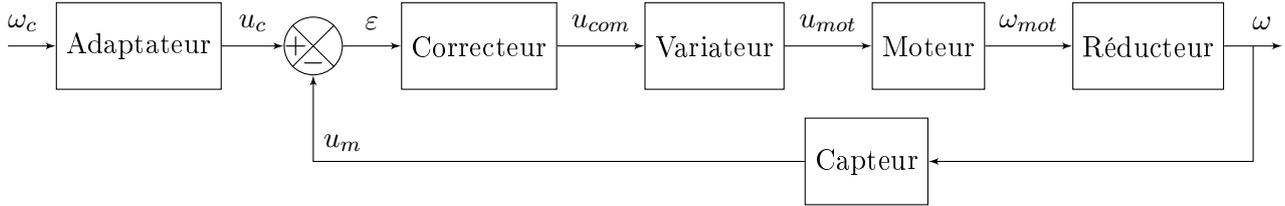


FIGURE 2 – Schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot.

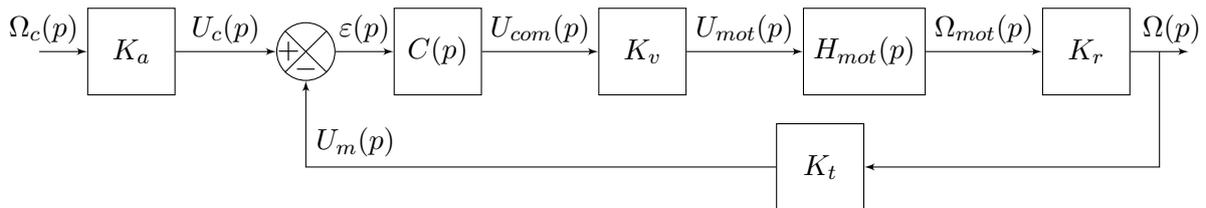


FIGURE 3 – Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse angulaire d'un bras de robot.

### 3.2 Association de blocs en série

Les schéma-blocs présentent souvent des blocs en série que l'on peut réduire dans le cadre du calcul de la fonction de transfert globale du système (FIGURE 4).



#### Définition Association de blocs en série

La fonction de transfert équivalente à l'association en série de plusieurs blocs est égale au **produit** des fonctions de transfert de ces blocs.

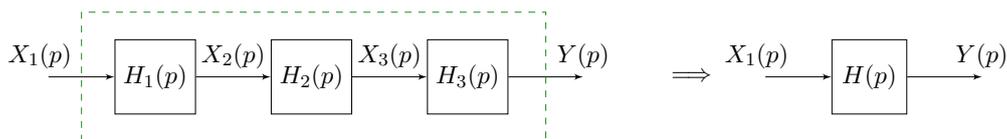


FIGURE 4 – Association de blocs en série.

#### Démonstration :

$$\left. \begin{aligned} X_2(p) &= H_1(p)X_1(p) \\ X_3(p) &= H_2(p)X_2(p) \\ Y(p) &= H_3(p)X_3(p) \end{aligned} \right\} \implies Y(p) = \underbrace{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}_{H(p)} X_1(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc :  $H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$

### 3.3 Différentes fonctions de transfert

#### 3.3.1 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé



##### Définition FTBF

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-blocs avec rétroaction. Pour étudier les performances de ces systèmes, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale. Celle-ci est appelée fonction de transfert en boucle fermée :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

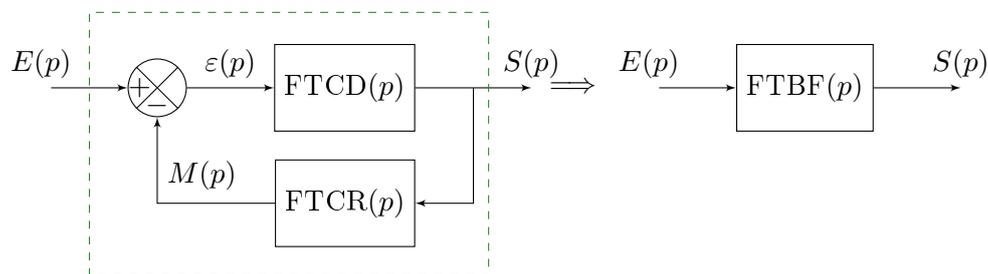


FIGURE 5 – Système bouclé



##### Définition Formule de Black

Dans le cas d'un système mis sous la forme de la FIGURE 5, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCR}(p)}$$

$\text{FTCD}(p)$  est généralement dénommée fonction de transfert de la **chaîne directe** ou **chaîne d'action** tandis que  $\text{FTCR}(p)$  est souvent dénommée **chaîne de retour** ou **chaîne de mesure**.

#### Démonstration :

##### Méthode élémentaire

Chaque élément graphique du schéma est traduit par son équation pour former un système d'équations à résoudre par substitution.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(p) = E(p) - M(p) \\ S(p) = \text{FTCD}(p)\varepsilon(p) \\ M(p) = \text{FTCR}(p)S(p) \end{array} \right\} \implies \text{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCR}(p)}$$

##### Méthode analytique

Exprimer la sortie en « remontant » le schéma-blocs ; la présence d'un sommateur se traduit par une ouverture de parenthèse ; toutes les parenthèses sont fermées une fois le schéma-blocs

complètement remonté.

$$S(p) = \dots$$

$$S(p) = \text{FTCD}(p) \times (\dots$$

$$S(p) = \text{FTCD}(p) \times (-\text{FTCR}(p)S(p) + E(p))$$

$$S(p) \times (1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCR}(p)) = \text{FTCD}(p)E(p)$$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p)\text{FTCR}(p)}$$

Présence sommateur : ouverture de parenthèse

À la fin : fermeture de toutes les parenthèses

Formule de Black



### Remarque

Quand dans un schéma-blocs complexe, une boucle générique comme celle définie ci-dessus apparaît, il est possible de la remplacer par une fonction de transfert globale en utilisant directement la formule de Black. En annexe page 18 et suivantes, des méthodes sont proposées pour modifier un schéma-blocs et le ramener à une structure contenant des boucles génériques.

### 3.3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

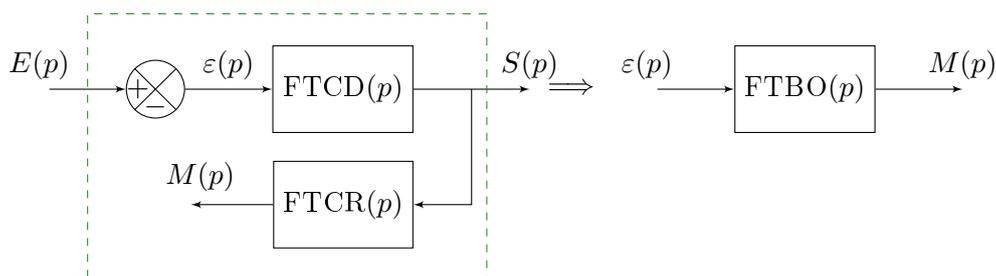


FIGURE 6 – Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) pour un système bouclé.



### Définition FTBO

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système d'entrée  $\varepsilon$ , lorsque le retour vers le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne directe  $\text{FTCD}(p)$  et la chaîne de retour  $\text{FTCR}(p)$ . On note donc :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \text{FTCD}(p) \text{FTCR}(p)$$



### Remarque

La FTBO est utilisée pour déterminer rapidement les performances de stabilité et de précision d'un système. Elle est donc essentielle pour l'analyse des systèmes complexes. On constate que la FTBO intervient dans la formule de Black.


**Définition** *Formule de Black*

Dans le cas d'un système mis sous la forme de la FIGURE 5, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

### 3.4 Retour sur l'exemple du bras de robot

On cherche à déterminer la fonction de transfert globale du bras de robot,  $\text{FTG}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$ .

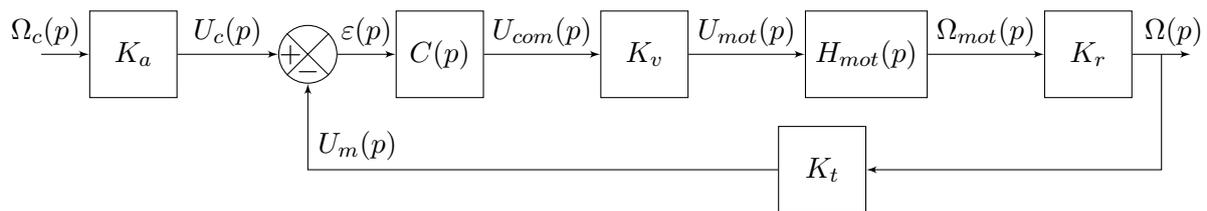


FIGURE 7 – Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse angulaire d'un bras de robot.

#### Méthode par réduction

Le schéma-bloc de la FIGURE 7 présente un bloc en série avec une boucle.

En appliquant la formule de Black, la fonction de transfert de la boucle est :

$$\frac{\Omega(p)}{U_c(p)} = \frac{C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$$

La fonction de transfert globale est donc :  $\text{FTG}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = K_a \frac{C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$

La fonction de transfert en boucle ouverte ne concerne que la boucle et vaut :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t$$

#### Méthode analytique

On a directement :  $\Omega(p) = K_r H_{mot}(p)K_v C(p) (K_a \Omega_c(p) - K_t \Omega(p))$

Donc :  $(1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t)\Omega(p) = K_r H_{mot}(p)K_v C(p)K_a \Omega_c(p)$

D'où :  $\text{FTG}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_a C(p)K_v H_{mot}(p)K_r}{1 + C(p)K_v H_{mot}(p)K_r K_t}$

Il reste au final à remplacer les fonctions de transfert par leurs expressions en fonction de  $p$  pour obtenir une expression simplifiée de la fonction de transfert globale :

$$\text{FTG}(p) = \frac{K_a C K_v K_m K_r}{1 + \tau_m p + C K_v K_m K_r K_t}$$

On peut mettre cette fonction de transfert sous forme canonique et constater que la fonction de transfert globale est d'ordre 1 :

$$\text{FTG}(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad K = \frac{K_a C K_v K_m K_r}{1 + C K_v K_m K_r K_t} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\tau_m}{1 + C K_v K_m K_r K_t}$$

## 4 Détermination des performances

### 4.1 Retour dans le domaine temporel

On connaît maintenant la fonction de transfert globale des systèmes dans le domaine de Laplace  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ . Si l'entrée  $E(p)$  est connue dans le domaine de Laplace, alors la sortie l'est aussi car  $S(p) = H(p) E(p)$ .

En remplaçant  $E(p)$  par son expression dans la relation  $S(p) = H(p) E(p)$ ,  $S(p)$  est alors une fraction rationnelle en  $p$ . La difficulté est alors de passer du domaine de Laplace au domaine temporel (transformation inverse). Cette transformation étant compliquée par le calcul de l'intégrale, on décompose la fraction rationnelle  $S(p)$  en fractions plus simples (d'ordre 0, 1 ou 2) et on utilise un tableau contenant les transformées inverses de ces fractions élémentaires (voir complément en annexe sur la décomposition en éléments simples).

La démarche globale est résumée sur la figure suivante :

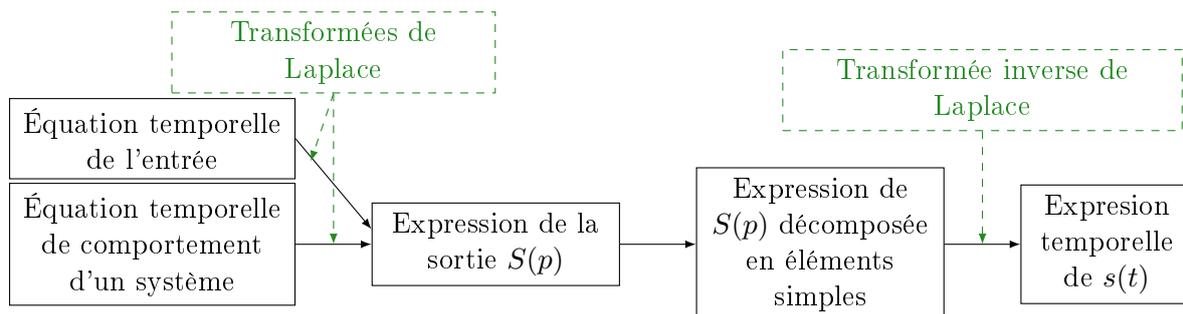


FIGURE 8 – Retour dans le domaine temporel : démarche globale

**Méthode :** Application pour un système du premier ordre en réponse à un échelon

Soit un système du premier ordre modélisé par sa fonction de transfert  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ . On impose au système une entrée en échelon  $e(t) = e_0 u(t)$ . On cherche à déterminer la réponse  $s(t)$  de ce système à une entrée en échelon.

On sait que  $S(p) = H(p) E(p)$  :

1. Détermination de  $S(p)$ .

On a  $e(t) = e_0 u(t)$ , dans le domaine de Laplace  $E(p) = \frac{e_0}{p}$ .

$$\text{Donc } S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0}{p}.$$

2. Décomposition en éléments simples.

$$\text{La forme de la décomposition est } S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p}.$$

En remettant au même dénominateur et après identification, on obtient  $A = Ke_0$  et  $B = -Ke_0\tau$ .

$$\text{Ainsi } S(p) = Ke_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right)$$

3. Retour dans le domaine temporel.

D'après le tableau des transformées de Laplace, on a le terme  $\frac{1}{p}$  qui devient  $u(t)$  dans le domaine temporel et le terme  $\frac{1}{p+a}$  qui devient  $e^{-at}u(t)$  dans le domaine temporel.

Il suffit de réécrire le terme  $\frac{\tau}{1 + \tau p}$  en  $\frac{1}{\frac{1}{\tau} + p}$  pour pouvoir identifier la fonction exponentielle.

On en déduit que la réponse temporelle est :  $s(t) = Ke_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$ .

On retrouve exactement la réponse à un échelon pour une équation différentielle du premier ordre avec conditions initiales nulles.

En pratique cette méthode est très rarement employée. En effet, il suffit de mettre la fonction de transfert sous forme canonique et d'en déduire son ordre et ses caractéristiques. On tombe fréquemment sur une fraction rationnelle en  $p$  d'ordre 1 ou 2. Sachant que la fonction de transfert est l'image d'une équation différentielle, on pourra directement donner l'allure ou l'expression de la réponse aux signaux tests (échelon, rampe, Dirac) si les fonctions sont du premier ou du second ordre à partir des résultats démontrés dans le chapitre précédent.

## 4.2 Détermination pratique des performances dans le domaine de Laplace

Les performances d'un système asservi sont la **stabilité**, la **rapidité** et la **précision**. L'élaboration d'un modèle mathématique permet de caractériser et quantifier les performances susceptibles d'être atteintes par le système.

Dans la plupart des cas, l'expression de la sortie dans le domaine de Laplace suffit pour conclure. Il n'est donc pas nécessaire de revenir dans le domaine temporel. C'est ce que nous allons voir pour chacune des performances.

### 4.2.1 Stabilité

Un système est stable si sa fonction de transfert ne présente **aucun pôle à partie réelle positive ou nulle**. Il est donc facile de vérifier la stabilité en calculant les racines du dénominateur (à la main ou à l'aide de la calculatrice).

#### Démonstration :

Il suffit de remarquer que les pôles  $p_i$  de la fonction de transfert correspondent aux racines du polynôme caractéristique de l'équation différentielle sans second membre. Grâce à la décomposition en éléments simples, la solution générale  $S(p)$  s'écrit comme une somme de fractions élémentaires  $\frac{1}{p - p_i}$  qui en repassant dans le domaine temporel correspond à une somme d'exponentielles  $e^{p_i t}$ . Pour que la réponse ne diverge pas, il est nécessaire et suffisant que les racines  $p_i$  soient à partie réelle strictement négative pour assurer une convergence vers 0 de la solution générale.



### Attention

La décomposition en élément simple de la solution en réponse à un échelon fait apparaître un terme en  $\frac{A}{p}$  (à racine nulle donc). Cela ne signifie pas que la solution sera divergente, ce terme correspond à la solution particulière. **Pour la stabilité, il faut regarder les pôles de la fonction de transfert du système uniquement**, ce qui correspond à la solution générale de l'équation différentielle.

### Application : Robot portique

La fonction de transfert étant du premier ordre  $\frac{K}{1 + \tau p}$  avec  $\tau > 0$ , donc le pôle  $-\frac{1}{\tau} < 0$  est à partie réelle négative. Le système est donc stable.

### Application : Segway

On considère le chariot + conducteur dont le comportement est décrit par l'équation différentielle où  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont deux constantes caractéristiques du système positives :

$$a \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2} = b C_m(t) + c \chi(t)$$

On suppose qu'on applique un échelon en couple au niveau des roues  $C_m(t) = C_0 u(t)$ . Que va-t-il se passer pour l'inclinaison du chariot  $\chi(t)$  par rapport à la verticale ?

En passant dans le domaine de Laplace, on obtient la relation :

$$\chi(p) = \frac{\frac{b}{a}}{p^2 - \frac{c}{a}} C_m(p) = \frac{K}{p^2 - \omega_0^2} C_m(p)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{c/a}$  et  $K = b/a$ .

L'échelon en couple s'écrit dans le domaine de Laplace :  $C_m(p) = \frac{C_0}{p}$  Ainsi la réponse  $\chi(p)$  s'écrit :

$$\chi(p) = \frac{K C_0}{p(p^2 - \omega_0^2)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\chi(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - \omega_0} + \frac{C}{p + \omega_0}$$

On pourrait déterminer les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  par identification mais ce n'est pas le but ici.

Le retour dans le domaine temporel permet d'écrire que :

$$\chi(t) = u(t) (A + B e^{\omega_0 t} + C e^{-\omega_0 t})$$

On constate que  $\chi(t)$  tend vers  $\infty$  à cause de la racine réelle positive  $\omega_0$ , ce qui atteste la nécessité d'avoir des pôles à partie réelle strictement négative.

## Dépassements

La présence ou non de dépassements ne peut se vérifier qu'à l'aide de la courbe de réponse temporelle à un échelon de consigne.

Notons toutefois qu'un système du premier ordre ne présente jamais de dépassement et qu'un système du second ordre peut en présenter si le facteur d'amortissement est inférieur à 1.

### 4.2.2 Rapidité

Pour un système quelconque, la rapidité ne peut être mesurée que sur la courbe de réponse temporelle à un échelon, en traçant une bande de  $\pm 5\%$  autour de la valeur à convergence.

En pratique, la fonction de transfert globale sera souvent un premier ordre ou un second ordre, modèle pour lesquels on peut conclure de manière générale, d'après le chapitre 3 :

1. Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5 % se calcule très facilement ( $t_{r5\%} = 3\tau$ ). Connaissant  $\tau$ , on peut estimer  $t_{r5\%}$  ou inversement,  $t_{r5\%}$  étant défini dans le cahier des charges, on peut en déduire  $\tau$  et donc les paramètres du système pour atteindre cette performance.
2. Pour un système du second ordre, l'abaque des temps de réponse réduit permet de déterminer  $t_{r5\%}$  connaissant le coefficient (facteur) d'amortissement  $\xi$  et  $\omega_0$ . Pour obtenir le système le plus rapide possible dans le cas d'un second ordre, il y a deux possibilités à connaître :
  - le cahier des charges n'autorise pas de dépassement : avec cette exigence, le système le plus rapide est obtenu pour un coefficient (facteur) d'amortissement  $\xi = 1$  ;
  - le cahier des charges autorise un dépassement : le système le plus rapide est obtenu pour un coefficient (facteur) d'amortissement  $\xi = 0,69$ .

### 4.2.3 Précision

La performance de précision n'a de sens que si l'entrée et la sortie sont des grandeurs comparables (donc de même unité).

Le **théorème de la valeur finale** est une propriété des transformées de Laplace (voir page 25) qui permet, pour un **système stable**, de calculer facilement la limite à convergence d'une sortie  $s(t)$  à partir de l'expression de la sortie dans le domaine de Laplace  $S(p)$  :



#### **Définition** *Théorème de la valeur finale*

Si la limite existe (le système est stable) alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)$$

L'entrée choisie est généralement une entrée en échelon (consigne constante)  $E(p) = \frac{e_0}{p}$ . Pour déterminer la précision, il faut calculer  $S(p) = H(p)E(p) = H(p)\frac{e_0}{p}$ , puis appliquer le théorème de la valeur finale. Si la sortie converge vers la même valeur  $e_0$  que celle imposée en entrée, alors le système est précis pour une entrée en échelon. Dans le cas contraire, il n'est pas précis et il faut quantifier l'erreur statique  $\mu_s = e_0 - s(\infty)$ .

On peut aussi calculer directement  $\mu_s$  :

$$\mu_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) (1 - H(p))$$

On cherche aussi parfois à déterminer la précision pour une entrée en rampe. On détermine dans ces conditions l'écart de traînage en calculant  $\mu_t$ .

**Application :** Erreur de vitesse pour le robot portique

La fonction de transfert globale du robot portique est  $FTG(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$

avec  $K = \frac{CK_a K_v K_m K_r}{1 + CK_t K_v K_m K_r}$  et  $\tau = \frac{\tau_m}{1 + CK_t K_v K_m K_r}$

On cherche à déterminer la précision du système pour une entrée  $\omega_c(t)$  en échelon de valeur  $\omega_c$ .

L'erreur entre  $\omega$  et  $\omega_c$  est définie par :

$$\mu_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_c(t) - \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(\Omega_c(p) - \Omega(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega_c(p) (1 - FTG(p))$$

Comme  $\Omega_c(p) = \frac{\omega_c}{p}$ , il suffit de calculer :  $\mu_s = \lim_{p \rightarrow 0} \omega_c \left(1 - \frac{K}{1 + \tau p}\right)$

Ainsi  $\mu_s = \omega_c (1 - K)$

Pour avoir une erreur qui tende vers 0, il faut que  $1 - K$  tende vers 0. Si  $K_t = K_a$ , il faut que  $C$  soit très grand. Mais l'erreur statique ne sera jamais nulle... elle tendra simplement vers 0.

Si  $K_t \neq K_a$ , on ne peut pas conclure directement.

## Sensibilité aux perturbations

Une perturbation est introduite dans un modèle sous la forme d'une seconde entrée ( $P(p)$ ). Le système de sortie  $S(p)$  présente alors deux fonctions de transfert :  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  avec  $P(p) = 0$  et

$$H_{\text{pert}}(p) = \frac{S(p)}{P(p)} \text{ avec } E(p) = 0.$$

La sortie du système est la somme des participations des deux entrées (par application du théorème de superposition valable pour les systèmes linéaires) :  $S(p) = H(p)E(p) + H_{\text{pert}}(p)P(p)$ .

La valeur à convergence de la réponse à l'entrée  $E(p)$  n'est alors pas affectée par la perturbation si la limite à convergence de la participation de la perturbation est nulle, c'est-à-dire (théorème de la valeur finale) si  $\lim_{p \rightarrow 0} p H_{\text{pert}}(p) P(p) = 0$  pour une entrée  $P(p)$  donnée.

## 5 Annexes

### 5.1 Complément au calcul de fonction de transfert

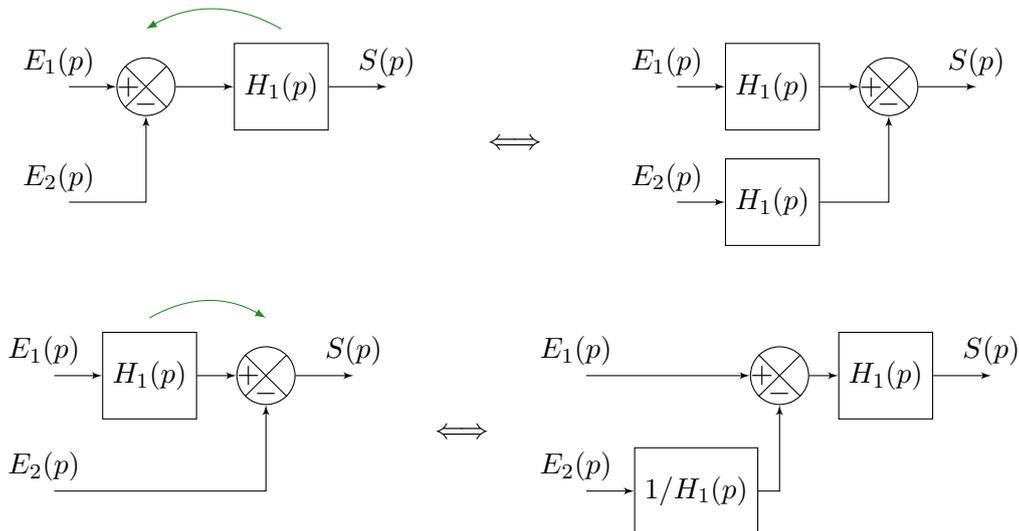
#### 5.1.1 Manipulation des schéma-blocs

L'objectif est de déterminer la fonction de transfert d'un schéma-blocs complexe en effectuant des modifications du schéma successives pour arriver sur une forme simple où il sera possible d'utiliser la formule de Black ou la propriété des blocs en série.

Pour cela, il faut connaître deux manipulations élémentaires :

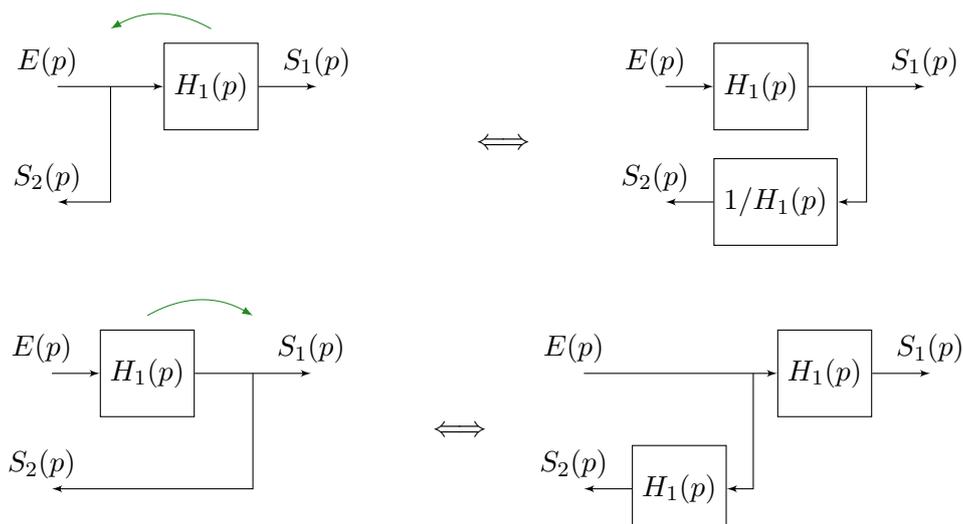
- déplacer un bloc avant ou après un sommateur ;
- déplacer un bloc avant ou après une jonction.

### 5.1.2 Déplacer un bloc avant ou après un sommateur



Pour vérifier qu'il y a équivalence entre les deux schémas, il faut vérifier la présence des mêmes blocs entre l'entrée  $E_1(p)$  et la sortie  $S(p)$ , ainsi qu'entre l'entrée  $E_2(p)$  et la sortie de  $S(p)$  sur le schéma initial et le schéma modifié.

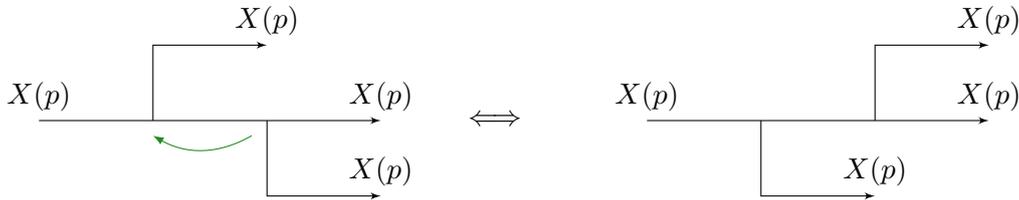
### 5.1.3 Déplacer un bloc avant ou après une jonction



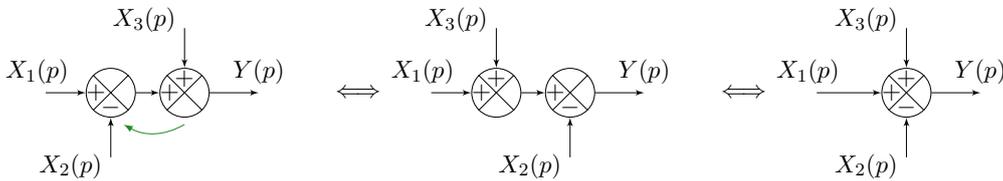
Pour vérifier qu'il y a équivalence entre les deux schémas, il faut vérifier la présence des mêmes blocs entre l'entrée  $E(p)$  et la sortie  $S_1(p)$ , ainsi qu'entre l'entrée  $E(p)$  et la sortie de  $S_2(p)$  sur le schéma initial et le schéma modifié.

### 5.1.4 Inversion de sommateurs ou de jonctions

Comme les grandeurs avant et après une jonction sont identiques, deux jonctions successives peuvent être inversées.



La somme étant associative, deux sommateurs peuvent être inversés. Les trois schémas suivants sont équivalents.



Sur ces trois schémas,  $Y(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$ .



#### Remarque

L'inversion d'un sommateur et d'une jonction n'est pas possible *a priori*.

### 5.1.5 Blocs en parallèle

Deux blocs sont dit en parallèle, lorsqu'une grandeur sur un lien se sépare en deux branches pour aller dans deux blocs différents et que la sortie de ces blocs se regroupe à l'aide d'un sommateur pour former une sortie (FIGURE 9).



#### Définition Blocs en parallèle

La fonction de transfert équivalente à plusieurs blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de ces blocs, affectée des signes du sommateur.

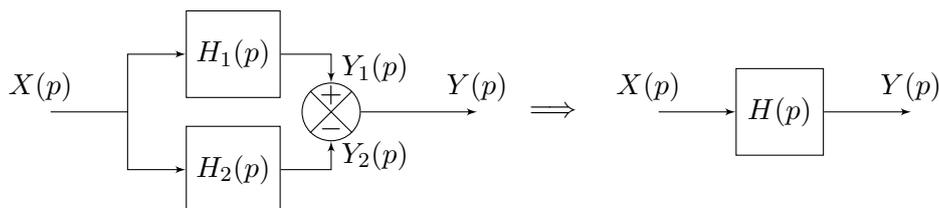


FIGURE 9 – Association de blocs en parallèle.

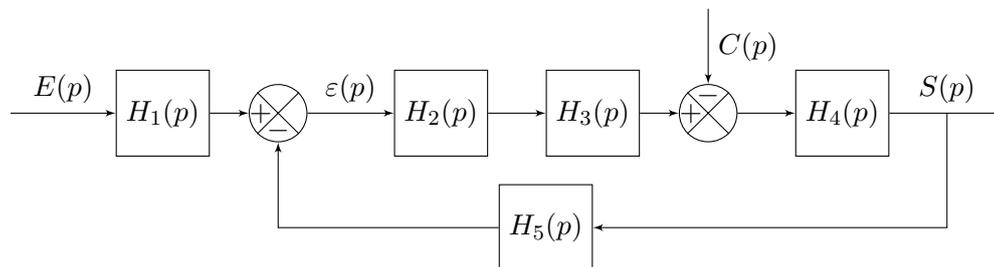
**Démonstration :**

$$\left. \begin{array}{l} Y_1(p) = H_1(p)X(p) \\ Y_2(p) = H_2(p)X(p) \\ Y(p) = Y_1(p) - Y_2(p) \end{array} \right\} \implies Y(p) = (H_1(p) - H_2(p))X(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc :  $H(p) = H_1(p) - H_2(p)$

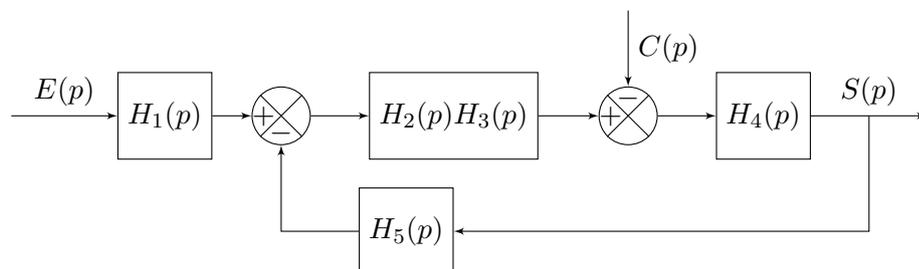
### 5.1.6 Application

**Exemple :** Déterminons la fonction de transfert globale du schéma-blocs suivant

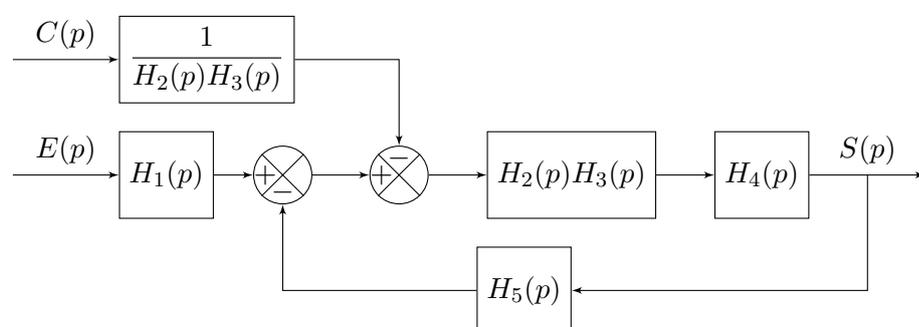


**Méthode graphique :** manipulation de schéma-blocs

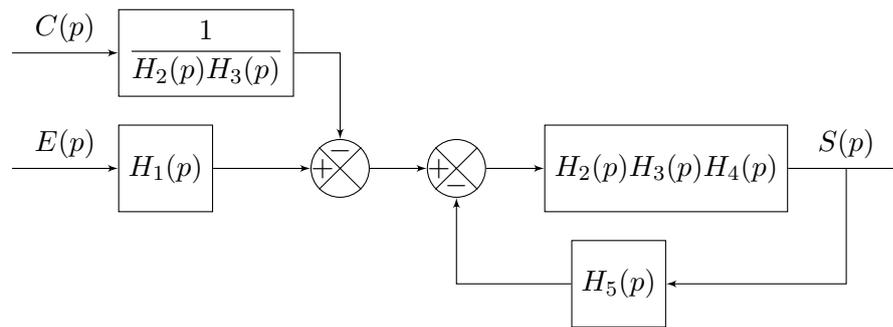
- Regroupons les deux blocs en série :



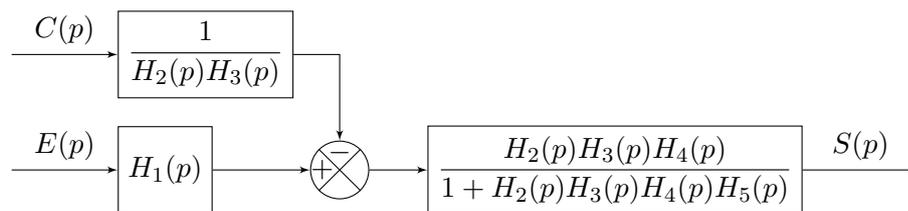
- Passons le bloc  $H_2(p)H_3(p)$  après le deuxième sommateur :



- Invertissons les deux sommateurs et regroupons le bloc  $H_2(p)H_3(p)$  avec le bloc  $H_4(p)$  :



- Appliquons la formule de Black sur la partie droite :



- D'où finalement la fonction de transfert globale :

$$S(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}E(p) - \frac{H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}C(p)$$

### Méthode analytique

$$S(p) = H_4(p) (-C(p) + H_3(p)H_2(p) [-H_5(p)S(p) + H_1(p)E(p)])$$

$$S(p) (1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)) = -H_4(p)C(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)E(p)$$

$$S(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}E(p) - \frac{H_4(p)}{1 + H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)}C(p)$$

On constate que la méthode analytique est beaucoup plus rapide que l'autre méthode. Elle est donc à préférer si aucune manipulation n'est explicitement demandée dans l'énoncé.

### Généralisation

Dans le cas de schéma-blocs complexes avec des boucles imbriquées, on peut être amené à mélanger les deux méthodes précédentes.

## 5.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace constitue un outil mathématique largement utilisé en ingénierie pour l'étude des systèmes linéaires, continus et invariants. Son utilisation permet :

- de manipuler aisément les équations différentielles de comportement des systèmes ;
- de résoudre facilement les équations différentielles pour des entrées simples ;
- d'obtenir les performances des systèmes sans calculer la réponse temporelle.

La définition de cet outil est donné au paragraphe 1.1

### 5.2.1 Propriétés

Les propriétés sont démontrées sur la transformation directe de Laplace  $\mathcal{L}$ . Les propriétés de la transformation inverse  $\mathcal{L}^{-1}$  seront simplement énoncées.



#### Propriété Unicité

À une fonction  $f(t)$  du domaine temporel correspond une fonction  $F(p)$  unique du domaine de Laplace. De même, à une fonction  $F(p)$  du domaine de Laplace correspond une unique fonction  $f(t)$  du domaine temporel. La transformation est dite *bi-univoque*.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

#### Démonstration :

Soient  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  les transformées de Laplace de la fonction  $f(t)$ , alors :

$$F_1(p) - F_2(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt - \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} (f(t) - f(t))e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} 0 dt = 0$$



#### Propriété Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire :  $\forall \mu$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)] \\ \mathcal{L}^{-1}[\lambda F(p) + \mu G(p)] &= \lambda \mathcal{L}^{-1}[F(p)] + \mu \mathcal{L}^{-1}[G(p)] \end{aligned}$$

#### Démonstration :

Soient  $f(t)$  et  $g(t)$  deux fonctions. Soient  $\mu$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-pt} dt \\ &= \lambda \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt + \mu \int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-pt} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda \mathcal{L}[f(t)] + \mu \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned}$$



**Propriété Transformée d'une dérivée**

La transformée de Laplace de la dérivée de la fonction  $f(t)$  conduit à :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^-) \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

**Démonstration :**

Par intégration par partie (IPP),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \underset{IPP}{=} [f(t)e^{-pt}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} pf(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} e^{-pt} dt \underset{IPP}{=} \left[\frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} p \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \\ &= p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-) \end{aligned}$$

**Remarque**

Dans les conditions de Heaviside, **dérivé** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique de Laplace.

**Propriété Transformée d'une intégrale**

La transformée de Laplace la primitive de la fonction  $f(t)$  qui s'annule en 0 conduit à :

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

**Démonstration :**

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \int_{0^-}^{\infty} \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau e^{-pt} dt = \left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \frac{e^{-pt}}{-p}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} \frac{f(t)}{p} e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}$$

**Remarque**

Dans les conditions de Heaviside, **intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique de Laplace.

**Propriété** *Théorème de la valeur initiale*

La valeur initiale  $f(0^-)$  d'une fonction peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

**Démonstration :**

La propriété de dérivation s'écrit :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-)$

En considérant la limite de cette expression quand  $p \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt}_{\rightarrow 0} = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) - f(0^-) = 0$$

D'où le résultat :  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ .

**Remarque**

Ce théorème n'est valable que dans le cas où la fonction  $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  est telle que  $\deg(N) \leq \deg(D)$ , ce qui est toujours le cas pour un système causal.

**Propriété** *Théorème de la valeur finale*

Sous réserve d'existence, la valeur à convergence d'une fonction  $f(t)$  peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Démonstration :**

$$\text{On a } \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^-)$$

$$\text{On prend la limite quand } p \rightarrow 0 : \lim_{p \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0^-)$$

$$\text{Or } \lim_{p \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = [f(t)]_{0^-}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-)$$

$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^-) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0^-) \text{ et donc : } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Remarque**

Ce théorème n'est valable que si les pôles de  $pF(p)$  sont à partie réelle strictement négative. Sinon  $f(t)$  n'admet pas de limite finie. **Attention**, l'utilisation du théorème de la valeur finale **dans le cas d'un système instable** conduit à un **résultat faux** qui pourrait sembler cohérent.

**Propriété Théorème du retard**

Soit  $g$  la fonction retardée d'une fonction  $f$  d'un temps  $\tau$  :  $g(t) = f(t - \tau)$ . La transformée de Laplace de la fonction  $g$  est :

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-p\tau} F(p)$$

**Démonstration :**

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt$$

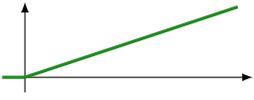
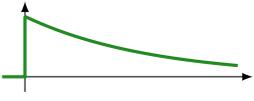
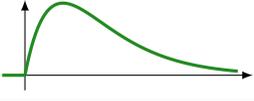
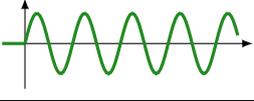
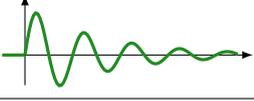
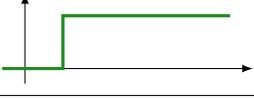
$$\text{Soit le changement de variable } T = t - \tau, dt = dT, t = T + \tau \text{ et } \begin{cases} t = 0 \\ t \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = -\tau \\ T \rightarrow \infty \end{cases}$$

L'expression s'écrit alors :

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(T)] = \int_{-\tau}^{\infty} f(T) e^{-p(T+\tau)} dT = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(T) e^{-pT} dT$$

Sachant que  $f(T)$  est nulle sur  $[-\tau, 0]$ , l'expression conduit au résultat :  $G(p) = e^{-p\tau} F(p)$

## 5.2.2 Tableaux des transformées de Laplace usuelles

	$x(t)$	$X(p)$
	Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
	Échelon d'amplitude $A$ : $A u(t)$	$\frac{A}{p}$
	Rampe de pente $b$ : $bt u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
	$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
	Retard : $f(t-T) u(t)$	$e^{-T} F(p)$

## 5.3 Décomposition en éléments simples

**? Problématique**

Transformer le quotient de 2 polynômes en  $p$  (désignant l'expression dans le domaine de Laplace de la réponse d'un système) en éléments simples dont les transformées de Laplace inverses seront extraites du tableau des transformées de Laplace ci-dessus.

Soit une fonction de transfert donnée sous la forme  $\frac{P(p)}{Q(p)}$  avec :

- $P(p)$  et  $Q(p)$  deux polynômes à coefficients réels ;
- $\deg(P) \leq \deg(Q)$ .

**Définition**

Tout polynôme  $Z(p)$  à coefficients réels se décompose de manière unique dans  $\mathbb{R}$  comme produit de facteurs de la forme  $(p - r_i)^{m_i}$  ou  $(p^2 + a_j p + b_j)^{n_j}$  :

$$Z(p) = K \prod_i (p - r_i)^{m_i} \prod_j (p^2 + a_j p + b_j)^{n_j}$$

Les coefficients  $m_i$  et  $n_j$  sont appelés ordres de multiplicité.

Seul le polynôme du dénominateur  $Q(p)$  est factorisé. Les différents termes seront appelés **éléments simples**.

**Définition**

La fraction rationnelle  $\frac{P(p)}{Q(p)}$  se décompose de manière unique comme somme d'éléments simples de  $Q(p)$  :

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(p - r_i)^k} + \sum_j \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{B_{j\ell} p + C_{j\ell}}{(p^2 + a_j p + b_j)^\ell}$$

**Méthode**

Pour déterminer les différents coefficients  $A_{ik}$ ,  $B_{j\ell}$  et  $C_{j\ell}$ , réduire l'expression au même dénominateur puis identifier chaque coefficient des polynômes.

**Exemple:**

Soit la fonction de transfert :  $H(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 3)}$

Le dénominateur est déjà écrit sous forme factorisé :  $p + 3$  à racine réelle et  $p^2 + p + 1$  à racines complexes conjuguées.

La décomposition en élément simple s'écrira :  $H(p) = \frac{A}{p + 3} + \frac{Bp + C}{p^2 + p + 1}$

Réduisons au même dénominateur :  $H(p) = \frac{A(p^2 + p + 1) + (Bp + C)(p + 3)}{(p + 3)(p^2 + p + 1)}$

Développons l'expression :  $H(p) = \frac{(A + B)p^2 + (A + 3B + C)p + (A + 3C)}{(p + 3)(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{(p + 3)(p^2 + p + 1)}$

Identifions les deux polynômes du numérateur :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 3B + C = 0 \\ A + 3C = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/7 \\ B = -1/7 \\ C = 2/7 \end{cases}$$

D'où l'expression finale de  $H(p)$  décomposée en éléments simples :  $H(p) = \frac{1/7}{p + 3} + \frac{-1/7 p + 2/7}{p^2 + p + 1}$

Note : Les calculatrices formelles réalisent les décompositions en éléments simples à l'aide de fonctions telles que `develop` ou `expand`.

